Berufliche Oberschule Rosenheim, FOS 12, Soziales

2. Kurzarbeit aus der Mathematik: Lösungsvorschlag

Datum:	2020-02-15	**Zeit:**	30 min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung, Taschenrechner	**Klasse:**	FS 12 e

---

1 Schreiben Sie den Term $f(x)=0{,}5\cdot 3^{4x}$ zur Basis e um, also $f(x)=e^{(\dots\dots)}$ / 2

Lösung: $f(x)=0{,}5\cdot 3^{4x} = e^{\ln(0{,}5)}\cdot\left(e^{\ln(3)}\right)^{4x} = e^{4\cdot\ln(3)x+\ln(0{,}5)} = e^{4\cdot\ln(3)x-\ln(2)}$

---

2 Zeigen, oder widerlegen Sie (z.B. durch passende Umformung der Gleichung): / 2

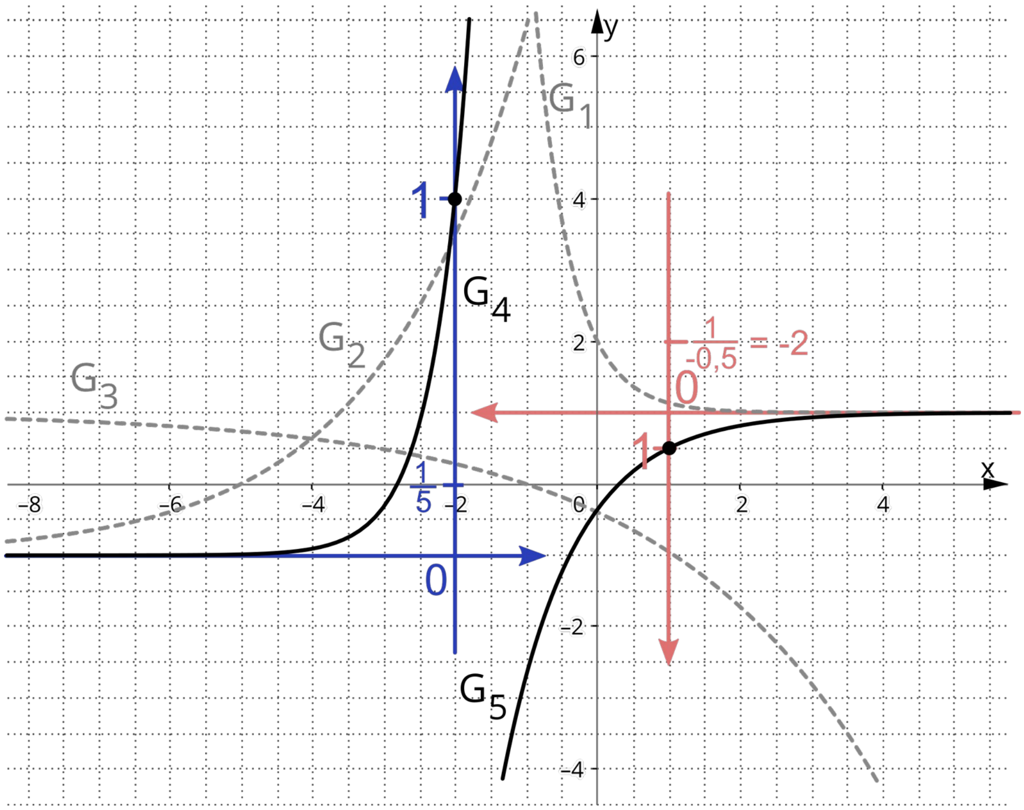
$\log_2(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$, mit $x\in\mathbb{R}^+$

Lösung:

$$\log_2(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(2)} \overset{|\cdot\ln(2)}{\Leftrightarrow} \ln(2)\cdot\log_2(x)=\ln(x) \Leftrightarrow \ln\left(2^{\log_2(x)}\right)=\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x)=\ln(x)\ (wahr)$$

---

3 Gegeben sind auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Exponentialfunktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ und Funktionstermen der Form $a\cdot e^{c(x-d)}+y_0$. / 4
Begründen Sie durch eindeutige Argumentation an Hand der Parameter *a*, *c*, *d* und y_0, welcher der untenstehenden Graphen jeweils zum Funktionsterm $p(x) = -0{,}5\cdot e^{1-x}+1$ bzw. $q(x) = 5\cdot e^{2(x+2)}-1$ passt.



Lösung:

$p(x) = -0{,}5\cdot e^{1-x}+1 = -0{,}5\cdot e^{-(x-1)}+1 \Rightarrow a=-0{,}5$, $c=-1$, $y_0=1$ und $d=1$.

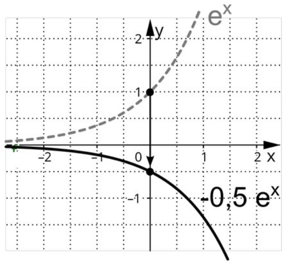
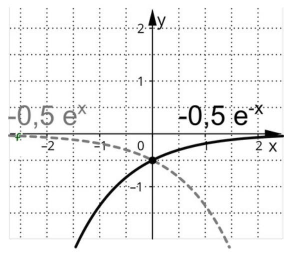
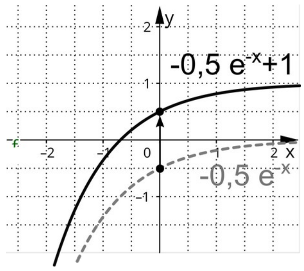
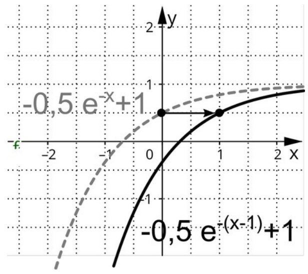
$q(x) = 5\cdot e^{2(x+2)}-1 \Rightarrow a=5$, $c=2$, $y_0=-1$ und $d=-2$.

Für p und q ergeben sich die jeweils eingezeichneten transformierten Koordinatensysteme bezüglich denen die Funktion jeweils den Term e^x besitzt.
Die Graphen müssen also jeweils durch den Punkt $(0\vee 1)$ gehen.

Somit ist $G_p=G_5$ und $G_q=G_4$.

Oder z.B. auch so:

Graph G_p geht aus G_{e^x} hervor durch:

<table>
<tr>
<td>1) Stauchen in y-Richtung ($|a|=0{,}5$) und Spiegelung an der x-Achse ($a<0$)
</td>
<td>2) Spiegelung an der y-Achse ($c=-1$)
Jetzt kommt nur noch G_5 in Frage.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3) $y_0=1$: Verschiebung um 1 in y-Richtung (also waagrechte Asymptote durch $(0{,}1)$) und
</td>
<td>4) Verschiebung in x-Richtung um 1 nach rechts ($d=1$)
G_p muss also durch den Punkt $(1;0{,}5)$ verlaufen, was er auch tut.
</td>
</tr>
</table>

Graph G_q geht aus G_{e^x} hervor durch:

Streckung in y-Richtung um Faktor $a=5$, Stauchung in x-Richtung um $c=2$, es verbleiben also G_2 und G_4 die beide auch um $y_0=-1$ nach unten verschoben sind (Asymptote $G_{y=-1}$). Der ursprüngliche Punkt $(0;1)$ liegt nun bei $(0;4)$. Bei Verschiebung um 2 nach links ($d=-2$) muss der Graph also durch $(-2;4)$ verlaufen. Diese Bedingung erfüllt der Graph G_4 .

4.0 Heiße Milch in einem Topf hat zum Beginn der Abkühlung eine Temperatur von *90°C*. Nach *5* Minuten wird eine Temperatur von *70°C* gemessen.
Runden Sie für diese Aufgabe Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

4.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der exponentiellen Abkühlungsfunktion $k(t)=a\cdot e^{c\cdot t}+23$ (t in Minuten). / 4

$\left[\text{Zwischenergebnis: } k(t)=67\cdot e^{-0{,}07\cdot t}+23\right]$

Lösung:

$$90=k(0)=a\cdot\underbrace{e^{c\cdot 0}}_{=1}+23=a+23 \;\Rightarrow\; a=67 \;\Rightarrow\; k(t)=67\cdot e^{c\cdot t}+23$$

$$70=k(5)=67\cdot e^{c\cdot 5}+23 \;\Leftrightarrow\; \frac{47}{67}=e^{c\cdot 5} \;\Rightarrow\; c\cdot 5=\ln\left(\frac{47}{67}\right)$$

$$\Rightarrow\; c=\frac{\ln\left(\frac{47}{67}\right)}{5}\approx -0{,}07091\approx -0{,}07 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{k(t)\approx 67\cdot e^{-0{,}07\cdot t}+23}$$

4.2 Berechnen Sie, um wie viele Grad Celsius sich die Milch nach *15* Minuten abgekühlt hat. / 2

Lösung:

Abkühlung $\Delta k = 90 - k(15) = 90 - \left(67 \cdot e^{-0{,}07 \cdot 15} + 23\right) \approx 43{,}55$

Die Milch ist nach 15 Minuten um ca. $43{,}55\,°C$ kälter geworden.

4.3 Berechnen Sie die Zeitpunkt, zu dem die Milch die gewünschte Temperatur von *42°C* erreicht hat. / 4

Lösung:

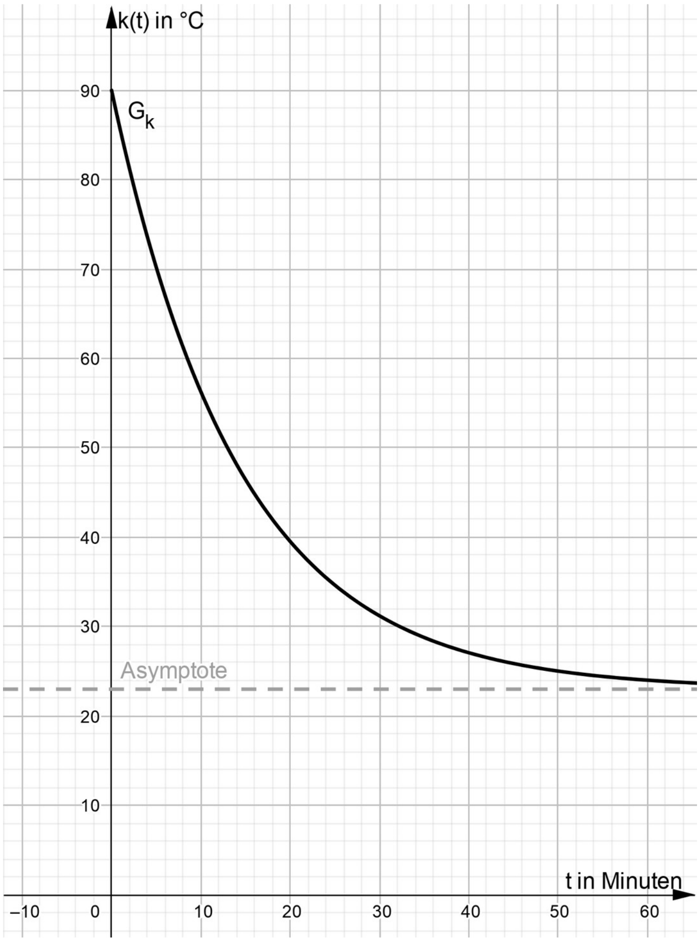
$$67 \cdot e^{-0{,}07 \cdot t} + 23 = 42 \Rightarrow e^{-0{,}07 \cdot t} = \frac{19}{67} \Rightarrow -0{,}07 \cdot t = \ln\left(\frac{19}{67}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{19}{67}\right)}{-0{,}07} \approx 18{,}003623 \approx \mathbf{18{,}00} \text{ ,}$$

die 42°C werden also nach c.a. 18 Minuten erreicht.

4.4 Skizzieren Sie den Graphen von *k*. / 2

Lösung:



$\sum$ / 20

Die äußere Form ist Teil der zu erbringenden Leistung!
Zur Beantwortung der Fragen ist immer die korrekte Fachsprache zu verwenden.