1. Stegreifaufgabe aus der Physik: Lösungsvorschlag

Datum:	2016-10-11	**Zeit:**	20 min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Taschenrechner, Formelsammlung	**Klasse:**	12 cT

1.0 Die im März 2004 gestartete Sonde Rosetta erreichte am 22. Mai 2014 den Kometen 67P und umkreiste ihn dort zunächst antriebslos auf verschiedenen kreisförmigen Erkundungsbahnen. Es ergibt sich nebenstehende Tabelle:

Bahn Nr.	Bahnradius **r** in km	Umlaufdauer **T** in 10^5 s
1	3,76	1,00
2	5,97	2,00
3	6,64	2,35
4	7,82	3,00

1.1 Ist die Bewegung von Rosetta auf der Bahn 1 beschleunigt? Begründen Sie Ihre Antwort. — 2 BE

Lösung:

Ja, denn es wirkt ständig die Gravitationskraft als Zentripedalkraft (sonst würde sich Rosetta geradlinig vom Kometen entfernen).

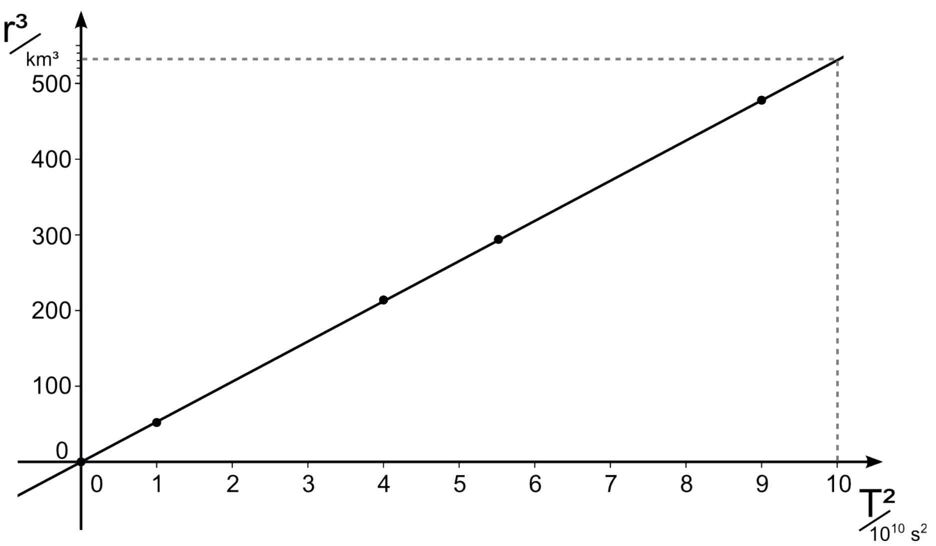
Oder so: Kreisbewegung ist immer beschleunigt!

Merke: die Geschwindigkeit kann sich ändern, nämlich die Richtung (!), obwohl der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist! Also ist eine Kreisbewegung immer beschleunigt.

1.2 Zeigen Sie durch **grafische Auswertung**, dass für die Bahnen der Zusammenhang $r^3 = k \cdot T^2$ gilt, wobei k eine Konstante ist. Geben Sie die Bedeutung dieser Konstanten an und ermitteln Sie den Wert der Konstanten k in $\left[\frac{m^3}{s^2}\right]$. — 6 BE

Lösung:

Bahn Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**
Bahnradius **r** in km	3,76	5,97	6,64	7,82
Umlaufdauer **T** in 10^5 s	1,00	2,00	2,35	3,00
T^2 in 10^{10} s^2	**1,00**	**4,00**	**5,52**	**9,00**
r^3 in km^3	**53,2**	**213**	**293**	**478**



Die Punkte liegen im Rahmen der Messgenauigkeit auf einer Ursprungsgeraden mit der konstanten Steigung $k = \frac{r^3}{T^2} \Rightarrow r^3 = k \cdot T^2$

Aus Graphik: $\boldsymbol{k} \approx \frac{53\,km^3}{10 \cdot 10^{10}\,s^2} = \frac{5{,}3 \cdot 10^{11}\,m^3}{10^{11}\,s^2} = \mathbf{5{,}3\,\frac{m^3}{s^2}}$.

Bedeutung: k ist der Kehrwert der Keplerkonstanten.

1.3 Begründen Sie mithilfe des Gravitationsgesetzes, dass für die Masse des Kometen m_K gilt: $m_K = \frac{4\pi^2}{G} \cdot k$ und berechnen Sie die Masse des Kometen. 5 BE

$\left[\text{Ergebnis: } m_K \approx 3{,}14 \cdot 10^{12} kg\right]$

Lösung:

$$\begin{aligned}
F_G &= F_Z \\
\Leftrightarrow\quad G\frac{m_S m_K}{r^2} &= m_S \omega^2 r \qquad \left|\cdot \frac{r^2}{m_S G}\right. \\
\Leftrightarrow\quad m_K &= \frac{\omega^2 r^3}{G} \\
\Leftrightarrow\quad m_K &= \underbrace{\left(2\pi\frac{1}{T}\right)^2}_{\omega^2} r^3 \cdot \frac{1}{G} \\
\Leftrightarrow\quad m_K &= \frac{4\pi^2}{G} \cdot \underbrace{\frac{r^3}{T^2}}_{=k} \\
&= \frac{4\pi^2}{G} \cdot k
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{m_K} = \frac{4\pi^2}{6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{m^3}{kg\,s^2}} \cdot 5{,}3\frac{m^3}{s^2} \approx 3{,}14 \cdot 10^{12} kg \approx \mathbf{3{,}1 \cdot 10^{12}}\,\boldsymbol{kg}$$

1.4 Der Lander von Rosetta ist am 10. November 2014 auf dem Kometen gelandet, der in erster Näherung als eine Kugel mit Radius $r_K = 2{,}1 \cdot 10^3 m$ angesehen werden kann. Berechnen Sie die Fallbeschleunigung an der Kometenoberfläche. 3 BE

Lösung:

Mit den Bezeichnungen: Fallbeschleunigung g_K auf der Oberfläche des Kometen, Gewichtskraft $F_{Gewicht}$ und $F_{Gravitation}$ auf einen Körper auf der Oberfläche des Kometen, gilt:

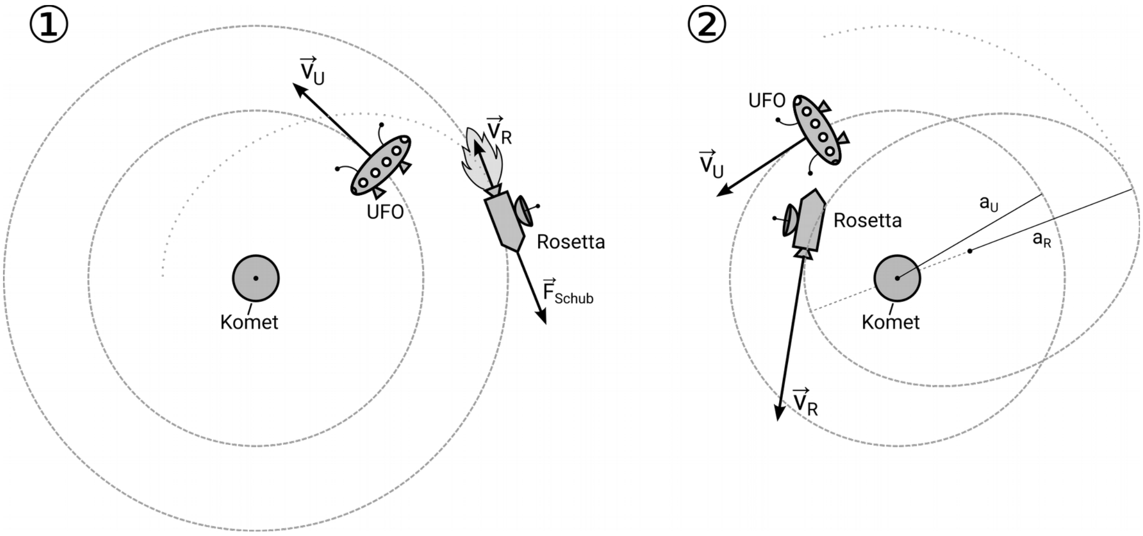
$$m_S \cdot \boldsymbol{g_K} = F_{Gewicht} = F_{Gravitation} = G \cdot \frac{m_K m_S}{r_K^2} \qquad |\cdot m_S^{-1}$$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{g_K} = G\frac{m_K}{r_K^2} = 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 10^{12} kg}{\left(2{,}1 \cdot 10^3 m\right)^2} \approx 4{,}752 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s^2} \approx \mathbf{4{,}8 \cdot 10^{-5}\,\frac{m}{s^2}}$$

1.5 Mit der Kamera von Rosetta wird ein UFO gesichtet, das in der gleichen Ebene und mit der gleichen Drehrichtung wie Rosetta den Kometen antriebslos umkreist. Es fliegt an Rosetta vorbei. Das Triebwerk von Rosetta kann nur einmal kurz gezündet werden. 3 BE

Begründen Sie unter Zuhilfenahme einer aussagegräftigen Skizze wie Rosetta das UFO wieder einholen kann.

Lösung:



Wenn Rosetta durch kurzes Zünden des Triebwerks entgegen der Flugrichtung den Betrag seiner Umlaufgeschwindigkeit passend erniedrigt (①), wird ihre Kreisbahn zu einer Ellipse mit einer kleineren großen Halbachse a_R als der großen Halbachse (Radius) a_U der UFO-Kreisbahn (②).

Nach Kepler III gilt: $\frac{T_R^2}{T_U^2} = \frac{a_R^3}{a_U^3}$. Aus $a_R < a_U$ folgt daraus $T_R < T_U$.

Oder:

Rosetta kann durch einen kurzen Schub die Geschwindigkeit so verändern, dass die Geschwindigkeit kurz nach dem Schub mehr in Richtung Komet zeigt und Ihr Betrag sich vergrößert hat. Passend gewählt, kann Rosetta dann das UFO einmal einholen, ist dann aber auf die Dauer langsamer als das UFO (wieder Kepler III).

$\sum$ 19 BE