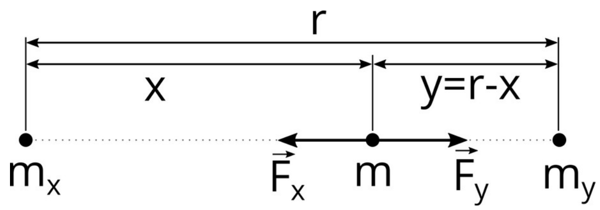
Gravitationsfreier Punkt:



Gegeben sind zwei punktförmige Massen m_x und m_y im Abstand r.

Gesucht ist der Punkt auf der Verbindungslinie der beiden Masse, an dem sich die beiden Gravitationskräfte auf einen Körper der Masse m genau aufheben.

Lösung:

Mit den Bezeichungen nebenstehender Skizze ist: $\vec{F}_x + \vec{F}_y = \vec{0}$

Für die Beträge der Kräfte gilt damit:

$$
\begin{aligned}
& F_y &&= F_x \\
\Leftrightarrow\quad & G \cdot \frac{m \cdot m_y}{y^2} &&= G \cdot \frac{m \cdot m_x}{x^2} \quad \Big| \cdot \frac{1}{G \cdot m} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{m_y}{y^2} &&= \frac{m_x}{x^2} \quad \Big| \cdot \left(x^2 \cdot y^2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & m_y \cdot x^2 &&= m_x \cdot y^2 \quad \Big| - m_x \cdot y^2 \\
\Leftrightarrow\quad & m_y \cdot x^2 - m_x \cdot y^2 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & m_y \cdot x^2 - m_x \cdot \underbrace{(r-x)}_{=y}{}^2 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & m_y \cdot x^2 - m_x \cdot \left(r^2 - 2r \cdot x + x^2\right) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & m_y \cdot x^2 - m_x \cdot r^2 + 2r\, m_x \cdot x - m_x \cdot x^2 &&= 0 \quad \Big| \cdot (-1) \\
\Leftrightarrow\quad & -0{,}5 \cdot m_y \cdot x^2 + 0{,}5 \cdot m_x \cdot r^2 - r\, m_x \cdot x + 0{,}5 \cdot m_x \cdot x^2 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \underbrace{\left(m_x - m_y\right)}_{A} \cdot \mathbf{x^2} \underbrace{-\, 2r\, m_x \cdot}_{B} \mathbf{x} + \underbrace{m_x \cdot r^2}_{C} &&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\quad x_{1/2} &= \frac{2r \cdot m_x \pm \sqrt{(2r \cdot m_x)^2 - 4 \cdot (m_x - m_y) \cdot (m_x \cdot r^2)}}{2(m_x - m_y)} = \frac{2r \cdot m_x \pm \sqrt{4r^2 \cdot m_x^2 - 4r^2 (m_x^2 - m_x \cdot m_y)}}{2(m_x - m_y)} \\
&= \frac{2r \cdot m_x \pm 2r \sqrt{m_x^2 - m_x^2 + m_x \cdot m_y}}{2(m_x - m_y)} = r \cdot \frac{m_x \pm \sqrt{m_x \cdot m_y}}{m_x - m_y}
\end{aligned}
$$

x_1 ist keine gültige Lösung, da beide Kräfte in die selbe Richtung schauen würden.

Also ist
$$\boldsymbol{x = r \cdot \frac{m_x - \sqrt{m_x \cdot m_y}}{m_x - m_y}}$$

Beispiel System Erde ↔ Mond:

Erde: $m_x = 5{,}9723 \cdot 10^{24}\,kg$, Mond: $m_y = 7{,}349 \cdot 10^{22}\,kg$, Große Halbachse $r = 384\,400\,km$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{x} = 384400\,km \cdot \frac{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,kg - \sqrt{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,kg \cdot 7{,}349 \cdot 10^{22}\,kg}}{5{,}9723 \cdot 10^{24}\,kg - 7{,}349 \cdot 10^{22}\,kg} \approx \mathbf{346\,029\,km}$$