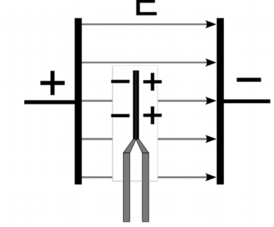
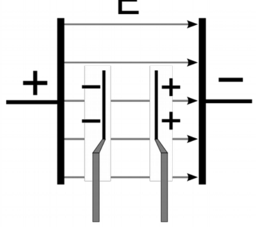
1.1. Der Kondensator

1.1.1 Flächenladungsdichte

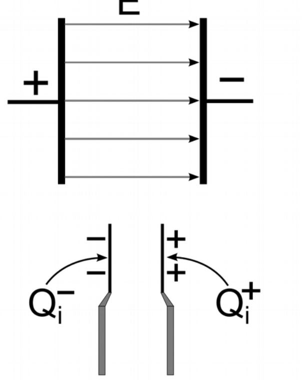
Versuch 1:

① 

Einbringen zweier identischer, ungeladener, aufeinanderliegender Metallplättchen - jeweils der Fläche $\mathbf{A_i}$ - in das homogene Feld eines Plattenkondensators **senkrecht** zum Feld

② 

Trennen der Plättchen **im** Feld

③ 

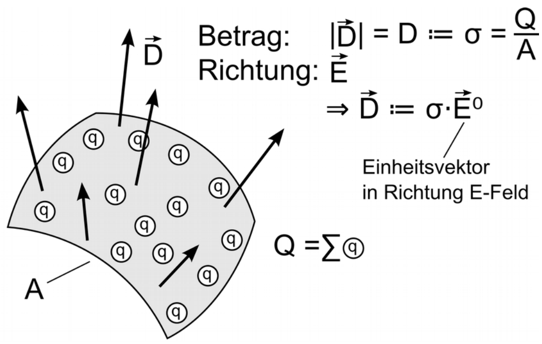
Messen der Ladung $\mathbf{Q_i^+}$ und $\mathbf{Q_i^-}$ auf den Plättchen **ausserhalb** des Feldes

Gegeben:

- elektrisches Feld $\vec{E}$ wird konstant gehalten,
- die Fläche A_i der Plättchen wird variiert.
- Fläche A der Kondensatorplatten ist gegeben,
  der Betrag Q der Ladung auf den jeweiligen Kondensatorplatten wird gemessen.

Ergebnisse:

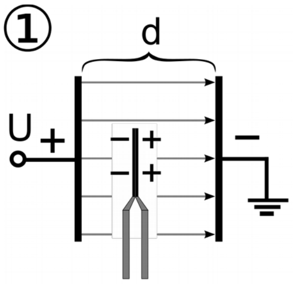
1. $\boldsymbol{Q_i} \coloneqq |Q_i^+| = |Q_i^-|$,
   d.h. die Ladungen auf den ***Influenzblättchen*** sind vom Betrag her gleich.
2. Der Quotient $\boldsymbol{\sigma \coloneqq \frac{Q_i}{A_i} = \frac{Q}{A}}$ ist **konstant** und heißt ***Flächenladungsdichte***.
   Einheit: $[\sigma] = \frac{C}{m^2} = \frac{A\,s}{m^2}$
3. In der Elektrostatik ist die ***elektrische Flussdichte*** $\boldsymbol{\vec{D}}$ an einem Punkt definiert als ein Vektor mit Richtung der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ in diesem Punkt und dem Betrag $\boldsymbol{D} = |\vec{D}| = \boldsymbol{\sigma}$



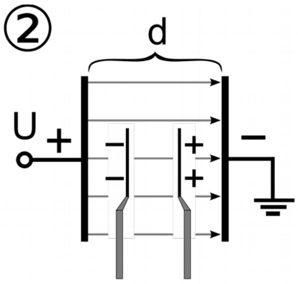
Es gilt somit die Formel aus der Formelsammlung: $\boldsymbol{D = \frac{Q_i}{A_i} = \frac{Q}{A}} \quad [=\sigma]$

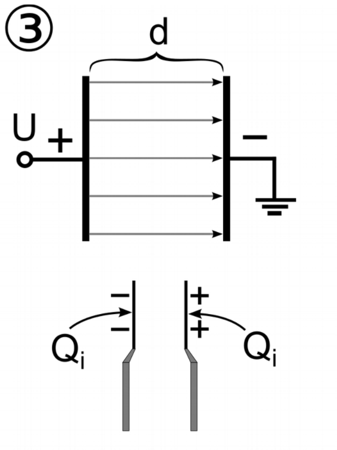
1.1.2 Elektrische Feldkonstante

Versuch 2:



Einbringen zweier identischer, ungeladener, aufeinanderliegender Metallplättchen - jeweils der Fläche **A**





Einbringen zweier identischer, ungeladener, aufeinanderliegender Metallplättchen - jeweils der Fläche $\mathbf{A_i}$ - in das homogene Feld eines Plattenkondensators **senkrecht** zum Feld

Trennen der Plättchen **im** Feld

Messen des Betrags der Ladung $\mathbf{Q_i}$ auf den Plättchen **ausserhalb** des Feldes

Gegeben:

- Fläche A_i der Plättchen und Fläche A der Kondensatorplatten ist konstant.
- Zwischen den Platten ist Vakuum
- Es werden gemessen:
  - Abstand d der Kondensatorplatten,
  - Spannung U an den Kondensatorplatten
  - Betrag Q_i der Ladung auf Kondensatorplatten wird gemessen.

Ergebnisse:

Versuch	Abstand	Spannung	Ladung
1	d	U	$\Rightarrow\ Q_i$
2	d	$\frac{1}{2}U$	$\Rightarrow\ \frac{1}{2}Q_i$
3	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}U$	$\Rightarrow\ Q_i$
4	$\frac{1}{2}d$	U	$\Rightarrow\ 2Q_i$

$$Q_i \sim \frac{U}{d} \overset{A_i\,konst.}{\underset{(Trick!)}{\Rightarrow}} \frac{Q_i}{A_i} \sim \frac{U}{d}$$

$\Rightarrow\ D = \frac{Q}{A} = \boldsymbol{\frac{Q_i}{A_i}} \sim \boldsymbol{\frac{U}{d}} = E$, also $\boldsymbol{D \sim E}$

Also:

$\boldsymbol{D = \epsilon_0 \cdot E}\ \Rightarrow\ E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot D = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}$

$\boldsymbol{\epsilon_0}$ nennen wir ***elektrische Feldkonstante***. Einheit: $[\epsilon_0] = \frac{C}{V\,m}$.

Anwendung:

1. **Bestimmung** von $\boldsymbol{\epsilon_0}$ (Abitur-Frage):

   Im homogenen elektrischen Feld im Vakuum gilt: $\frac{U}{d} = E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon_0} = \frac{Q \cdot d}{A \cdot U}$

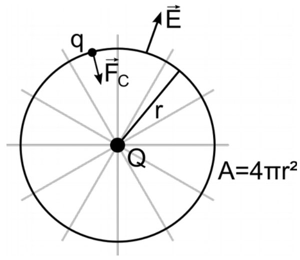
   A, U, d und Q können gemessen werden, wobei die Messung von Q schwierig ist.

2. **Anmerkung**

   Für die Kugeloberfläche gilt $A = 4\pi r^2$

   $\Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \boldsymbol{= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}} \Rightarrow \boldsymbol{F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}}$

   für eine Ladung q im radialsymmetrischen Feld das durch die Ladung Q erzeugt wird (die alt-bekannte Formel!).

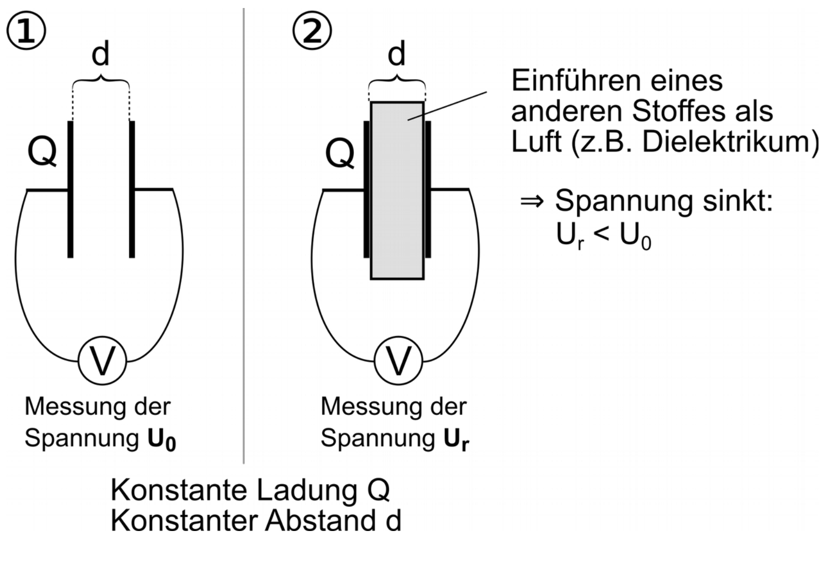


1.1.3 Relative Permittivität

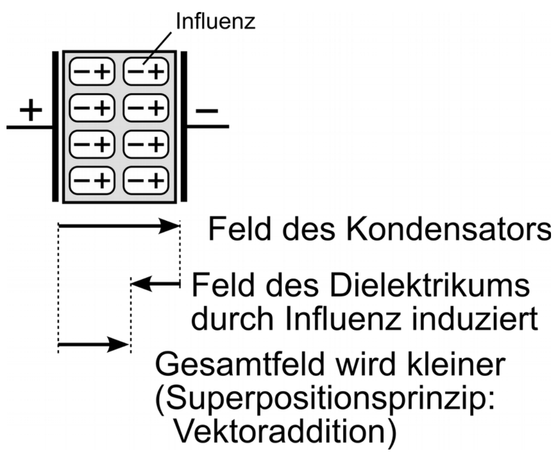
Definition:

Ein ***Dielektrikum*** ist eine nichtmetallische, elektrisch nichtleitende oder schwach leitende Substanz, mit i.A. nicht frei beweglichen Ladungsträgern.

Versuch 3:



Eine mögliche Begründung:



Da Q, A und d konstant folgt: $D=\frac{Q}{A}\sim\frac{U_r}{d}$, also $D=\epsilon\cdot\frac{U_r}{d}$. ϵ heißt ***Permittivität***.

Da andererseits $D=\epsilon_0\cdot\underbrace{\frac{U_o}{d}}_{=E}$ folgt:

$$\epsilon\cdot\frac{U_r}{d}=\epsilon_0\cdot\frac{U_0}{d}\;\Leftrightarrow\;\epsilon\cdot U_r=\epsilon_0\cdot U_0\;\Leftrightarrow\;\epsilon=\epsilon_0\cdot\underbrace{\frac{U_0}{U_r}}_{=:\,\epsilon_r}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r$$

Die dimensionslose Zahl ϵ_r heißt ***relative Permittivität*** und hängt ab von Material, Temperatur, Frequenz etc. . Hier wird sie als konstant angesehen.

Einige Werte für ϵ_r bei $18\,°C$ und $50\,Hz$ (Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Permittivität):

Medium	ϵ_r
Vakuum	1
Luft	1,00059
Papier	1-4
Tantalpentoxid	27
Wasser	88 $(0\,°C,\ 0-1\,GHz)$

Unter Berücksichtigung der relativen Permittivität ergeben sich nun folgender Zusammenhang elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und Flussdichte $\vec{D}$:

$$\boxed{\vec{D}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\vec{E}}$$

und für die Beträge:

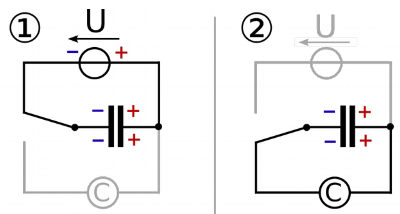
$$\boxed{\frac{Q}{A}=\sigma=D=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot E=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{U}{d}}\quad\text{(I)}$$

1.1.4 Kapazität

Aus Versuch 2 ergab sich: $Q\sim U$ am Plattenkondensator, also $\frac{Q}{U}=konstant$ bei gegebener Geometrie des Kondensators. Wir definieren damit eine neue Größe, die

Kapazität $\boxed{C:=\frac{Q}{U}}$.

Anmerkung: $\frac{Q}{U}=konstant$ kann auch über folgenden Versuch gezeigt werden:



Anlegen einer Spannung U | Messen der Ladung Q

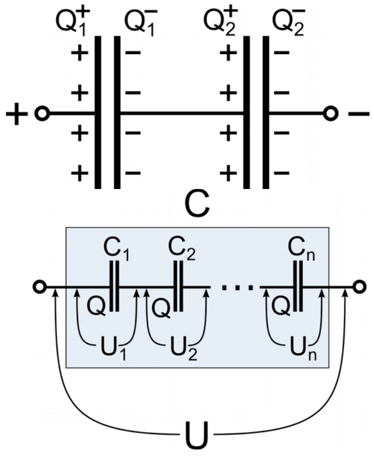
Nach (I) ist $\frac{Q}{A}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{U}{d} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{Q}{U}}_{=C}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{A}{d}$

d.h.: Für die Kapazität eines Plattenkondensators gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{C=\frac{Q}{U}=\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{A}{d}}}$$

1.1.4.1 Serien- und Parallelschaltung von Kondensatoren

Serienschaltung:



Vorbemerkung:
Wie in nebenstehende Skizze ersichtlich ist bei der Serienschaltung von Kondensatoren der Betrag der Ladung auf allen Kondensatorplatten gleich groß, also
$Q := |Q_1^+|=|Q_1^-|=|Q_2^+|=|Q_2^-|=\ldots=|Q_n^+|=|Q_n^-|$

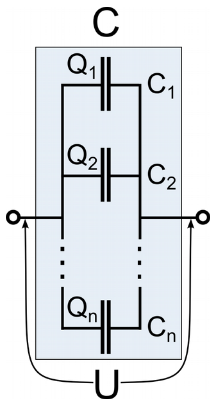
In nebenstehender Skizze bilden C_1 bis C_n einen Spannungsteiler. Es gilt somit:

$$\frac{Q}{C}=U=U_1+U_2+\ldots+U_n=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\ldots+\frac{Q}{C_n} \quad |\cdot\frac{1}{Q}$$

also

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\ldots+\frac{1}{C_n}}}\text{, d.h. }\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

Parallelschaltung:



Wie nebenstehender Skizze ersichtlich liegt an allen Kondensatoren die Spannung U an und es gilt für die Gesamtladung Q:

$$Q=Q_1+Q_2+\ldots+Q_n \quad |\cdot\frac{1}{U}$$

$$\Rightarrow \quad C=\frac{Q}{U}=\frac{Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}{U}=\underbrace{\frac{Q_1}{U}}_{C_1}+\underbrace{\frac{Q_2}{U}}_{C_2}\ldots+\underbrace{\frac{Q_n}{U}}_{C_n}$$

also

$$\boxed{\boldsymbol{C=C_1+C_2+\ldots+C_n}}\text{, d.h. }C=\sum_{i=1}^{n}C_i$$

Energieinhalt eines Plattenkondensators

$E=\frac{1}{\epsilon_0\epsilon_r}\frac{Q}{A}=konstant$. Für den Betrag der Kraft auf eine Ladung Q im inneren des Feldes gilt: $F(Q)=E\cdot Q$. Da auf eine Ladung im Inneren des Kondensators die Anziehende und die Abstoßende Kraft der beiden Platten in eine Richtung zusammen wirken, ist der Betrag der Kraft der einen Platte auf die andere $\frac{1}{2}F(Q)$, wenn sich der Ladungsbetrag Q jeweils auf den Platten befindet.

Somit ist $W = \frac{1}{2}F(Q)\cdot d = \frac{1}{2}E\cdot Q\cdot d = \frac{1}{2}\frac{U}{d}\cdot Q\cdot d = \frac{1}{2}\underbrace{U}_{\frac{Q}{C}}\cdot\underbrace{Q}_{C\cdot U} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

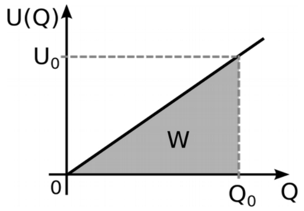
Es ist also

$$\boxed{\boldsymbol{W = \frac{1}{2}U\cdot Q = \frac{1}{2}C\cdot U^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}}$$

Weiterhin gilt $\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot\frac{A}{d}}_{C}\cdot\left(\underbrace{E\cdot d}_{U}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}\epsilon_0\cdot\epsilon_r\cdot E^2\cdot\underbrace{V}_{A\cdot d}}$

Folgerung: die elektrische Energie eines Plattenkondensators ist abhängig vom Volumen V des Kondensators.

„Allgemein: herrscht in einem Volumen ein homogenes Feld der Feldstärke E, so ist in diesem Raum Energie gespeichert, d.h. das elektrische Feld, auch ohne Materie, ist Träger von elektrischer Energie.“ (nach Scheiderer S.270).



Andere Herleitung von $W = \frac{1}{2}U\cdot Q$:

$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow U = \frac{Q}{C}$.

Für U in Abhängigkeit von Q ergibt sich also nebenstehender Graph. Nach Definition der Spannung ist die Arbeit W der Flächeninhalt des schattierten Dreiecks, also $W = \frac{1}{2}U_0\cdot Q_0$.

$$W = \int_0^{Q_0} U(Q)\,dQ = \int_0^{Q_0}\frac{Q}{C}\,dQ = \frac{1}{C}\int_0^{Q_0} Q\,dQ = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$