Schwingungen

1. Energieerhaltung

Es werden üblicherweise abgeschlossenen Systeme unter Vernachlässigung von Reibung, Rotationsenergie etc. betrachtet. Dass der Energieerhaltungssatz gilt, von dem gehen wir aus, dennoch ist es eine immer wiederkehrende Standardaufgabe diesen Nachweis zu führen:

Bei harmonischen Schwingungen mit der „$\sin^2 + \cos^2 = 1$“-Methode.

Wenn nur die Konstanz der Gesamtenergie gefragt ist kann es auch praktisch sein zu zeigen, dass die erste Ableitung der Gesamtenergie nach der Zeit gleich 0 ist, denn dann war die Gesamtenergie konstant!

Allgemeine Vorraussetzungen:

Richtgröße D und lineares Kraftgesetz $F(t) = -D \cdot x(t)$

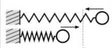
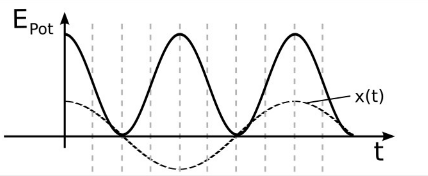
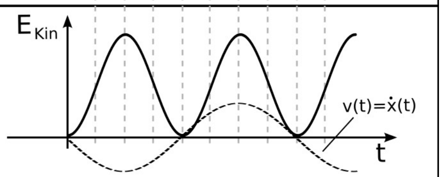
⇒ Differenzialgleichung $m \cdot \ddot{x}(t) = -D \cdot x(t)$

⇒ Lösung: $x(t) = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t + \varphi_0\right) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

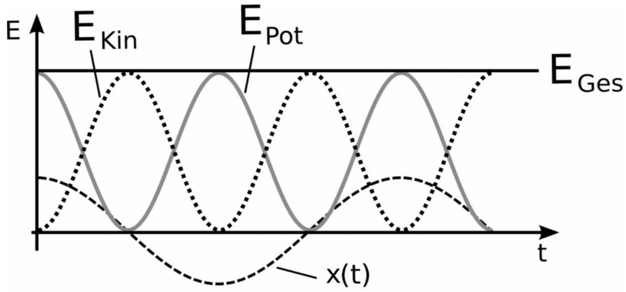
⇒ $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)\right) = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Energiebetrachtung:

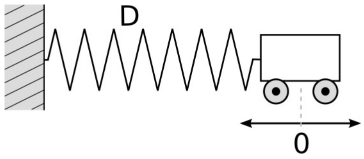
Es sind mindestens zwei verschiedene Formen der Energie beteiligt.

Art der Energie	 maximale Auslenkung	 Null-Durchgang	
E_{Pot}	max	0	
E_{Kin}	0	max	

Summe der Energien:



Beispiel horizontales Federpendel:



$$Richtgröße = Federhärte$$

$$\boldsymbol{E_{Pot}} = \frac{1}{2}D\cdot x(t)^2 = \frac{1}{2}D\cdot\left(A\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)^2}$$

$$\boldsymbol{E_{Kin}} = \frac{1}{2}m\cdot v(t)^2 = \frac{1}{2}m\left(\omega\cdot A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)\right)^2 = \frac{1}{2}m\cdot\underbrace{\omega^2}_{=\frac{D}{m}}\cdot A^2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot\frac{D}{m}\cdot A^2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)^2}$$

$$\boldsymbol{E_{Ges}} = E_{Pot}+E_{Kin}$$

$$= \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)^2 + \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)^2$$

$$= \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\underbrace{\left(\sin(\omega t+\varphi_0)^2 + \cos(\omega t+\varphi_0)^2\right)}_{=1}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}D\cdot A^2}$$

Oder so (Ableitung der Gesamtenergie = 0):

$$\boldsymbol{\frac{d}{dt}E_{Ges}} = \frac{d}{dt}\left(E_{Pot}+E_{Kin}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)^2 + \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\frac{d}{dt}\left(\sin(\omega t+\varphi_0)^2 + \cos(\omega t+\varphi_0)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\underbrace{\left(2\sin(\omega t+\varphi_0)\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)\omega + 2\cos(\omega t+\varphi_0)\cdot\left(-\sin(\omega t+\varphi_0)\right)\omega\right)}_{=0}$$

$$= \boldsymbol{0}$$

Allgemein gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{E_{Ges} = \frac{1}{2}D\cdot A^2 = \frac{1}{2}m\cdot A^2\cdot\omega^2}}$$

Die Schwingungsenergie ist also **proportional** zum Quadrat der Amplitude: $\boldsymbol{E_{Ges}\sim A^2}$.

Bemerkung:

Im Fall erzwungener Schwingung ist der Hinweis von Bedeutung, dass das dies nur im Fall der sogenannten „Eigenschwingung" gilt: $\omega=\omega_0$, mit $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$