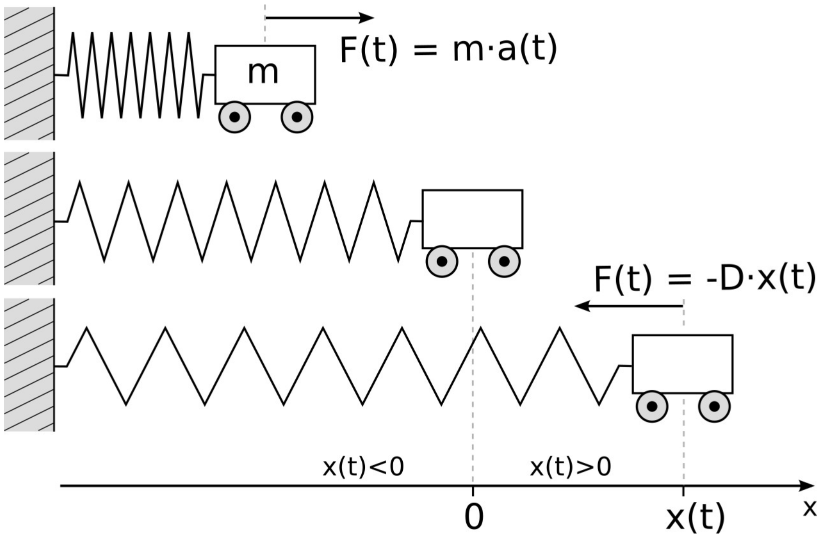
Schwingungen

1. Harmonische Schwingung

1.1 Herleitung der Differentialgleichung



In obiger Skizze ist:

t:	Zeit
$x(t)$	Auslenkung der Masse vom Gleichgewichtszustand (Feder entspannt) in Abhängigkeit von der Zeit t
$F(t)$	Rückstellende Federkraft in Abhängigkeit von $x(t)$ und somit von t. Es gilt: $F(t)=-D\cdot x(t)$ (Hooksches Gesetz).

Nach Newton ist nun $F(t)=m\cdot a(t)=m\cdot\ddot{x}(t)$

Somit: $-D\cdot x(t)=F(t)=m\cdot\ddot{x}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{x(t)=-\frac{m}{D}\ddot{x}(t)}$

Wenn wir vorrübergehend $\frac{m}{D}=1$ wählen und die Einheiten vernachlässigen, dann ergibt sich: $\boldsymbol{x(t)=-\ddot{x}(t)}$

Es wird also im wesentlichen eine Funktion gesucht, die 2-mal abgeleitet wieder die Funktion selbst ergibt, nur mit negativem Vorzeichen.

Eine solche Funktion ist z.B. $\sin(t)$, denn $(\sin(t))^{\cdot\cdot}=-\sin(t)$.

Bemerkung: $A\cdot\sin(t-\varphi_0)$ oder $\cos(t)=\sin(t+\frac{\pi}{2})$ ginge auch.

Etwas Nachdenken und Probieren ergibt $\boldsymbol{x(t)=\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t\right)}$ als eine mögliche Lösung,

und damit allgemein $\boldsymbol{x(t)=A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)}$ denn:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \left[A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)\right]^{\cdot\cdot} = \left[A\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}\right]^{\cdot} = -A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot\sqrt{\frac{D}{m}}\\ &= -\frac{D}{m}\cdot\underbrace{A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\cdot t+\varphi_0\right)}_{=x(t)} = -\frac{D}{m}\cdot x(t)\end{aligned}$$

Mit der Kreisfrequenz $\boldsymbol{\omega := \sqrt{\frac{D}{m}}}$ ergibt sich die Schwingungsdauer (zeitliche Periodenlänge!) mit $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m}}} \boldsymbol{= 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$.