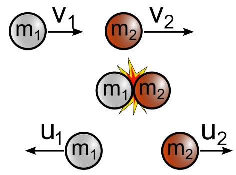
Vollkommen elastischer zentraler Stoß: Spezial- und Grenzfälle

Mit den Bezeichungen nebenstehender Skizze gilt für die Geschwindigkeiten u_1 und u_2 nach dem Stoß:

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 (2 v_2 - v_1)}{m_1 + m_2} \text{ und } u_2 = \frac{m_2 v_2 + m_1 (2 v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

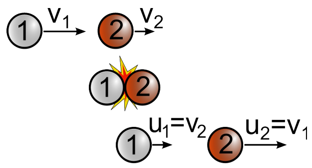


Spezialfälle:

$\boldsymbol{m_1 = m_2 = m \;\Rightarrow\; u_1 = v_2}$ und $\boldsymbol{u_2 = v_1}$, denn

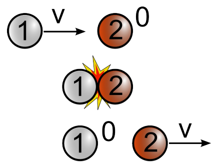
$$u_1 = \frac{m v_1 + m(2 v_2 - v_1)}{m + m} = \frac{v_1 + (2 v_2 - v_1)}{2} = v_2 \text{ und}$$

$$u_2 = \frac{m v_2 + m(2 v_1 - v_2)}{m + m} = \frac{v_2 + (2 v_1 - v_2)}{2} = v_1$$



Bei gleichen Massen vertauschen sich also einfach die Geschwindigkeiten und somit auch die kinetischen Energien der beiden Körper.

Speziell für $\boldsymbol{v := v_1}$ und $\boldsymbol{v_2 = 0}$ findet eine **vollständige Energieübertragung** statt, die stoßende Kugel wird durch den Stoß auf 0 abgebremst und die ruhende Kugel bewegt sich mit der der anstoßenden weiter.



Grenzfälle:

Im Folgenden ist $\boldsymbol{v := v_1}$ und $\boldsymbol{v_2 = 0}$, die 2-te Kugel ruht also. Dann gilt:

$$\boldsymbol{u_1} = \frac{m_1 v + m_2 (2 \cdot 0 - v)}{m_1 + m_2} = \boldsymbol{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v} \text{ und } \boldsymbol{u_2} = \frac{m_2 \cdot 0 + m_1 (2 v - 0)}{m_1 + m_2} = \boldsymbol{\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v}$$

Für die Energiedifferenzen der jeweiligen Massen vor und nach dem Stoß gilt dann:

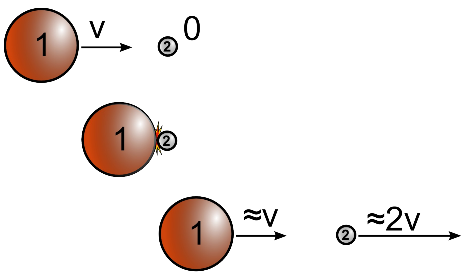
$$\Delta E_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(v^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot v^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 v^2 \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\Delta E_{m_2} = 0 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = -\frac{1}{2} m_2 \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 = -\frac{1}{2} m_2 v^2 \frac{4 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Fall 1: $\boldsymbol{m_1 \gg m_2}$

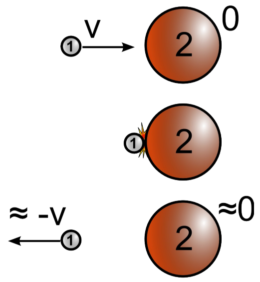
m_2 kann also gegenüber m_1 vernachlässigt werden.

$$u_1 = \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_{\approx 1} \cdot v \approx v \text{ und } u_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \cdot v \approx 2 v$$



Der Körper mit der großen Masse bewegt sich also mit fast unveränderter Geschwindigkeit weiter und überträgt nur einen kleinen Teil seiner kinetischen Energie auf den Körper mit der kleineren Masse, der sich mit fast **doppelter Geschwindigkeit der großen Masse** weiterbewegt.

Fall 2: $\boldsymbol{m_1 \ll m_2}$



m_1 kann also gegenüber m_2 vernachlässigt werden.

$$u_1 = \underbrace{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}_{\approx -1} \cdot v \approx -v \quad \text{und} \quad u_2 = \underbrace{\frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}}_{\approx 0} \cdot v \approx 0$$

Der Körper mit der kleinen Masse wird also **an der großen Masse reflektiert** und überträgt nur einen kleinen Teil seiner kinetischen Energie auf den Körper mit der großen Masse, der in erster Näherung in Ruhe bleibt.

Fall 3: $\boldsymbol{m_1 = m_2}$

Siehe oben.