Aufgaben

ABI 2014 SI

4.0 Am Ende der Show bewerten die Zuschauer jedes Model. Eva hatte bei der letzten Bewertung eine Zustimmung von 60% erhalten. Es wird vermutet, dass Eva bei der nächsten Bewertung weniger Zustimmung bekommt (Gegenhypothese). Zur Überprüfung der Vermutung wird eine Umfrage unter 200 Personen durchgeführt.

4.1 Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und ermitteln Sie den minimalen Annahmebereich der Nullhypothese auf dem 5 %-Niveau.

Lösung:

$\boldsymbol{\alpha = 0{,}05}$ — $5\,\%$-Niveau
Stichworte:
α - Fehler / Fehler (Risiko) 1-ter Art / Signifikanzniveau / Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße (X) — Anzahl der Zustimmungen für Eva unter 200 Befragten

$\boldsymbol{n := 200}$ — 200 Befragte

$\boldsymbol{p_0 := 0{,}6}$ — Zustimmung von 60% erhalten

Gegenhypothese $\boldsymbol{H_1}$ — $p < p_0 = 0{,}6$: Eva bekommt **weniger** als $60\,\% = 0{,}6$ Zustimmung bei der nächsten Bewertung

Ablehnungsbereich $\boldsymbol{\overline{A}}$ — $\overline{A} = \{0;\ 1;\ \ldots\ ;\ k\}$

⇒ **linksseitiger** Hypothesentest — H_1 steht links

Nullhypothese $\boldsymbol{H_0}$ — $p \geq p_0 = 0{,}6$: Eva bekommt mindestens $60\,\% = 0{,}6$ Zustimmung bei der nächsten Bewertung

Annahmebereich $\boldsymbol{A}$ — $A = \{k+1;\ k+2;\ \ldots\ ;\ 200\}$

$$P(\overline{A}) \leq \alpha \;\Leftrightarrow\; P(X \leq k) \leq \alpha \;\Leftrightarrow\; F(200;\ 0{,}6\ ,k) = \sum_{i=0}^{k} B(200;\ 0{,}6;\ i) \leq 0{,}05$$

Ablesen aus Tafelwerk:

Binomialverteilung

n	k	p = 0,50 B(n; p; k)	p = 0,50 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	p = 0,55 B(n; p; k)	p = 0,55 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	p = 0,60 B(n; p; k)	p = 0,60 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	B(n; p
200	100	0,05635	0,52817	0,02063	0,08870	0,00095	0,00264	0,000
	101	0,05579	0,58396	0,02496	0,11366	0,00141	0,00405	0,000
	102	0,05415	0,63811	0,02961	0,14327	0,00206	0,00610	0,000
	103	0,05152	0,68964	0,03443	0,17770	0,00293	0,00904	0,000
	104	0,04805	0,73769	0,03925	0,21695	0,00410	0,01314	0,000
	105	0,04393	0,78162	0,04386	0,26081	0,00563	0,01877	0,000
	106	0,03938	0,82100	0,04804	0,30886	0,00757	0,02634	0,000
	107	0,03459	0,85559	0,05159	0,36044	0,00997	0,03631	0,000
	$\boxed{108}$	0,02979	0,88538	0,05429	0,41474	0,01288	$\boxed{0{,}04918}$	≤ 0,05
	109	0,02514	0,91052	0,05601	0,47074	0,01631	0,06549	> 0,05
	110	0,02080	0,93132	0,05663	0,52738	0,02023	0,08572	0,000
	111	0,01686	0,94818	0,05612	0,58350	0,02461	0,11033	0,001
	112	0,01340	0,96158	0,05451	0,63800	0,02933	0,13966	0,001

Größtes k, das die Bedingung P(X≤k) ≤ 0,05 gerade noch erfüllt

4.1 Minimale Lösung:

Testgröße X: Anzahl der Zustimmungen für Eva bei $\boldsymbol{n \coloneqq 200}$ Befragten.

$\boldsymbol{p_0 \coloneqq 0{,}6}$

Nullhypothese $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{p \geq p_0 = 0{,}6}$

Gegenhypothese $\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{p < p_0 = 0{,}6}$ ⇒ **Linksseitiger** Signifikanztest:

Ablehnungsbereich: $\boldsymbol{\overline{A} = \{0;\ 1;\ \ldots\ ;\ k\}}$

Annahmebereich: $\boldsymbol{A = \{k{+}1;\ k{+}2;\ \ldots\ ;\ 200\}}$

Signifikanzniveau: $\boldsymbol{\alpha = 0{,}05}$

Linksseitiger Signifikanztest:

$P(\overline{A}) = P(X \leq k) = F_{0,6}^{200}(k) \leq 0{,}05 \overset{TW\ S.30}{\Rightarrow} F_{0,6}^{200}(108) = 0{,}04918 \leq 0{,}05 \Rightarrow \boldsymbol{k = 108}$

⇒ Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0;\ 1;\ \ldots\ ;\ \boldsymbol{108}\}$ und Annahmebereich $A = \{\boldsymbol{109};\ \ldots\ ;\ 200\}$

4.2 Geben Sie an, wie man anhand des Tests (vgl. 4.1) entscheidet, wenn nur 55% der Befagten Eva die Zustimmung geben.
Erläutern Sie, worin im vorliegenden Fall der Fehler 2. Art besteht und warum man seine Wahrscheinlichkeit nicht berechnen kann.

Lösung:

$0{,}55 \cdot 200 = 110$ liegt im Annahmebereich, also bekommt Eva weiterhin 60% Zustimmung.

Fehler 2. Art: Man hält weiterhin an der Zustimmung für Eva von mindestens 60% fest, obwohl sie in Wirklichkeit geringer ist.

Der Fehler 2. Art kann nicht berechnet werden, da die tatsächliche Zustimmungsrate von Eva nicht bekannt ist.

ABI 2013 SI

4.0 Erfahrungsgemäß treten 12,5% der Passagiere, die Tickets gekauft haben, den Flug nicht an. Damit die Flugzeuge möglichst voll besetzt sind, werden die Maschinen überbucht.

4.2 Man vermutet, dass inzwischen mehr als 12,5% der Buchungen nicht wahrgenommen werden (Gegenhypothese). Dazu wird ein Test an Hand von 200 Buchungen durchgeführt. Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau. Erläutern Sie, wie man entscheiden wird, wenn 170 den Flug antreten.

Minimale Lösung:

Testgröße X: Anzahl der nicht wahrgenommenen Buchungen bei $\boldsymbol{n := 200}$ $\boldsymbol{p_0 := 0{,}125}$

Gegenhypothese $\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{p > p_0 = 0{,}125}$ ⇒ **Rechtsseitiger** Signifikanztest:

Nullhypothese $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{p \leq p_0 = 0{,}125}$

Annahmebereich: $\boldsymbol{A = \{0;\ 1;\ \ldots\ ;\ k\}}$

Ablehnungsbereich: $\boldsymbol{\overline{A} = \{k+1;\ k+2;\ \ldots\ ;\ 200\}}$

Signifikanzniveau: $\boldsymbol{\alpha = 0{,}05}$

Rechtsseitiger Signifikanztest:

$$P(\overline{A}) = P(X \geq k+1) = 1 - P(X < k+1) = 1 - P(X \leq k) = 1 - F_{0,125}^{200}(k) \leq 0{,}05$$

$$\Rightarrow\ F_{0,125}^{200}(k) \geq 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \ \overset{TW\ S.14}{\Rightarrow}\ F_{0,125}^{200}(33) = 0{,}96124 \geq 0{,}95 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{k = 33}$$

⇒ Annahmebereich $A = \{0;\ 1;\ \ldots\ ;\ \mathbf{33}\}$ und Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{\mathbf{34};\ \ldots\ ;\ 200\}$

170 Passagiere treten den Flug an, 30 treten den Flug nicht an.

$30 \in A \ \Rightarrow\ H_0$ wird angenommen, d. h. dass höchstens $12{,}5\,\%$ der Buchungen nicht wahrgenommen werden.

Ablesen aus Tafelwerk:

Binomialverteilung

n	k	p = 0,05 B(n; p; k)	p = 0,05 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	p = 0,10 B(n; p; k)	p = 0,10 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	p = 0,125 B(n; p; k)	p = 0,125 $\sum_{i=0}^{k}$ B(n; p; i)	p = 0,15 B(n; p; k)	p = 0,15 $\sum_{i=0}^{k}$
100	30							0,00006	0
	31							0,00003	0
	32							0,00001	0
	33							0,00000	1
200	0	0,00004	0,00004						
	1	0,00037	0,00040						
	2	[illegible]	[illegible]						
	29			0,01077	0,98367	0,05628	0,83273	0,07832	0
	30			0,00682	0,99049	0,04583	0,87856	0,07878	0
	31			0,00415	0,99465	0,03590	0,91446		0
	32			0,00244	0,99708	0,02709	0,94154	< 0,95	0
	$\boxed{33}$			0,00138	0,99846	0,01970	$\boxed{0,96124}$	≧ 0,95	0
	34			0,00075	0,99922	0,01382	0,97506		0
	35			0,00040	0,99961	0,00937	0,98443	0,04631	0
	36			0,00020	0,99981	0,00613	0,99056	0,03746	0
	37			0,00010	0,99991	0,00388	0,99444	0,02930	0

Kleinstes k, das die Bedingung P(X≦k) ≧ 0,95 gerade noch erfüllt