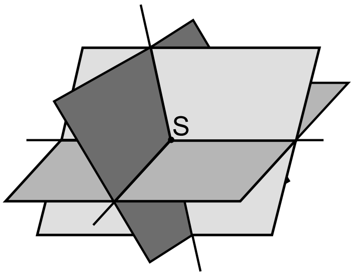
Schnitt dreier Ebenen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: &\ \mathbf{f_1}\,x_1+\mathbf{f_2}\,x_2+\mathbf{f_3}\,x_3=k_f \\ \mathbf{G}: &\ \mathbf{g_1}x_1+\mathbf{g_2}x_2+\mathbf{g_3}x_3=k_g \\ \mathbf{H}: &\ \mathbf{h_1}x_1+\mathbf{h_2}x_2+\mathbf{h_3}x_3=k_h \end{aligned}$$

Die Ebenen schneiden sich in **genau einem Punkt** S



⇔ Das Gleichungssystem $\begin{cases} \mathbf{f_1}\,x_1+\mathbf{f_2}\,x_2+\mathbf{f_3}\,x_3=k_f \\ \mathbf{g_1}x_1+\mathbf{g_2}x_2+\mathbf{g_3}x_3=k_g \\ \mathbf{h_1}x_1+\mathbf{h_2}x_2+\mathbf{h_3}x_3=k_h \end{cases}$ besitzt **genau eine Lösung**

⇔ $\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0}$ (Die **Determinante** der *Normalenvektoren* ist **≠ 0**)

⇔ Die *Normalenvektoren* der Ebenen sind **linear unabhängig**

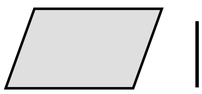
Die Ebenen schneiden sich **nicht** in **genau einem Punkt** S

⇔ $\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$ (Die **Determinante** der *Normalenvektoren* **= 0**)

⇔ Die *Normalenvektoren* der Ebenen sind **linear abhängig,** d.h. **komplanar**

Alle **drei** Ebenen sind **parallel**:

Die drei Ebenen **fallen zusammen**

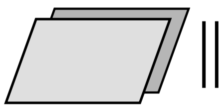


F = G = H

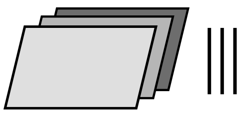
⇔ Im Gleichungssystem fallen nach Umformen zwei Zeilen weg, die Schnittpunkte bilden eine Ebene $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

⇔ Die *Normalenvektoren* der Ebenen sind **kollinear**

Mindestens zwei Ebenen sind **echt parallel**



F ≠ G = H
G ≠ H = F
H ≠ F = G

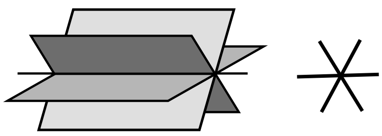


F ≠ G ≠ H ≠ F

⇔ Das Gleichungssystem lässt sich in die Form $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & m \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{n \neq 0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ bringen ist also nicht lösbar

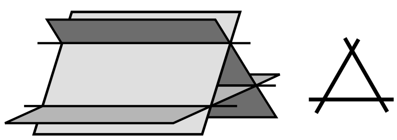
Höchstens zwei Ebenen sind **parallel**:

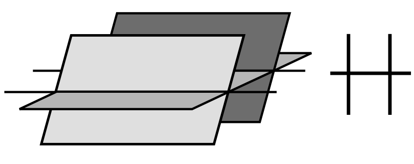
Die drei Ebenen **schneiden sich** in einer **gemeinsamen Geraden**



⇔ Im Gleichungssystem fällt nach Umformen genau eine Zeilen weg, die Schnittpunkte bilden eine Gerade $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & m \\ b_1 & b_2 & b_3 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Die drei Ebenen besitzten **keine gemeinsame Schnittgerade**





⇔ Das Gleichungssystem lässt sich in die Form $\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & m \\ b_1 & b_2 & b_3 & n \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p \neq 0} \end{array}\right)$ bringen ist also nicht lösbar