Vektoren

1. Rechenregeln

- $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$ und $\lambda\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ (assoziativ)
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (kommutativ)
- $\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ (distributiv)
- In einer Gleichung kann ein Vektor auf beiden Seiten addiert oder subtrahiert werden. Bsp.: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \quad |-\vec{a}$
  $\Leftrightarrow \quad \vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$

2. Bezeichnungen

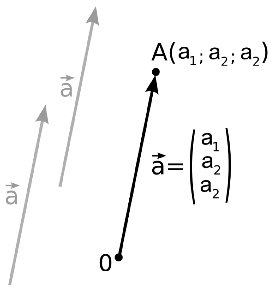

Abb. 1: Ortsvektor

Ortsvektor:

Der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ ist der **Ortsvektor** des Punktes $A\left(a_{1,}a_{2,}a_3\right)$.

Beachte: Der Pfeil vom Ursprung nach A ist nur **ein** Repräsentant des Ortsvektors!

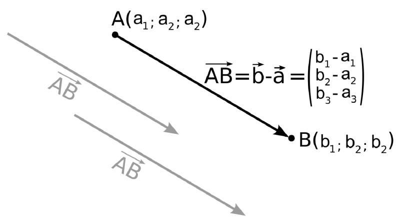

Abb. 2: Richtungsvektor

Richtungsvektor

Ist $B\left(b_{1,}b_{2,}b_3\right)$ ein weiterer Punkt, dann wird durch A und B der **Richtungsvektor** $\overrightarrow{AB}$ bestimmt.
Der Ortsvektor eine Punktes A ist also der spezielle Richtungsvektor $\overrightarrow{0A}=\vec{a}-\vec{0}=\vec{a}$.
Beachte: Der Pfeil von A nach B ist nur **ein** Repräsentant des Richtungsvektors!

Es gilt: $\boxed{\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}}$

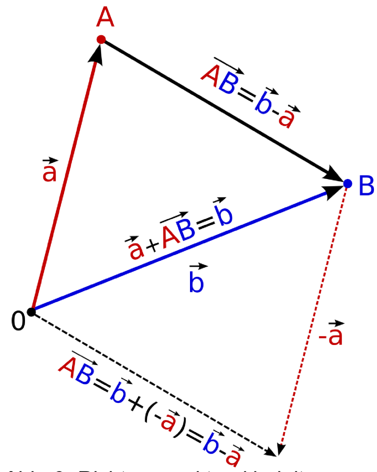

Abb. 3: Richtungsvektor: Herleitung

Nullvektor $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Gegenvektor

$-\vec{a}$ ist **Gegenvektor** zu $\vec{a}$ und umgekehrt, es gilt also $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

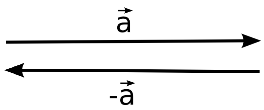

Abb. 4: Gegenvektor

Vektorkette

Die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ bilden eine **geschlossene Vektorkette** falls gilt: $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_n = \vec{0}$

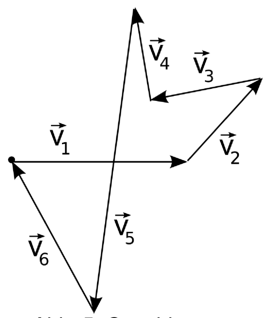

Abb. 5: Geschlossene Vektorkette

Linearkombination

Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ Vektoren und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $n \in \mathbb{N}^*$, dann heißt der Vektor $\boldsymbol{\vec{v} = x_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n}$ **Linearkombination** der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

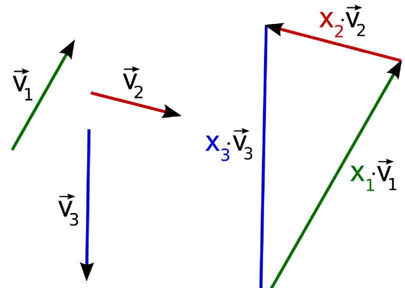

Abb. 6: Linear abhängige Vektoren: Es kann geschlossene Vektorkette erzeugt werden

Linear unabhängig-abhängig, kollinear, komplanar

Ist $\boldsymbol{x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0}$ die **einzige** Lösung der Vektorgleichung $\boldsymbol{x_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}}$,

dann heißen die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ **linear unabhängig**, andernfalls **linear abhängig**.

- Zwei linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ heißen **kollinear**, d.h. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Ortsvektoren von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liegen dann auf einer Geraden.
  Es gilt: drei oder mehr Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig.

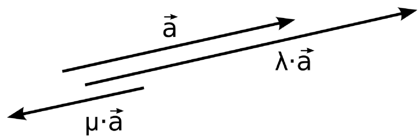

Abb. 7: Kollinear

- Drei linear abhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ heissen **komplanar**. Die Ortsvektoren von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen dann in einer Ebene.

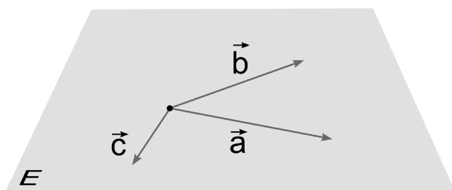

Abb. 8: Komplanar

Linear abhängigen Vektor bestimmen

Aufgabe: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ so bestimmen, dass $x_1 \cdot \vec{a} + x_2 \cdot \vec{b} + x_3 \cdot \vec{c} = \vec{d}$.

Gleichungssysem aufstellen und lösen (mit Gauß / Cramer / etc.)

$$x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 a_1 + x_2 b_1 + x_3 c_1 = d_1 \\ \Rightarrow x_1 a_2 + x_2 b_2 + x_3 c_2 = d_2 \\ \Rightarrow x_1 a_3 + x_2 b_3 + x_3 c_3 = d_3 \end{array}$$

Basis

- **Zwei linear unabhängige** Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden eine **Basis** des $\mathbb{R}^2$, das bedeutet, dass sich **jeder** Vektor $\vec{v}$ des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt: $\vec{v} = x_1 \vec{a} + x_2 \vec{b}$.
  Die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ sind die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- **Drei linear unabhängige** Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden eine **Basis** des $\mathbb{R}^3$, das bedeutet,

dass sich **jeder** Vektor $\vec{v}$ des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt:
$\vec{v} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$

Die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

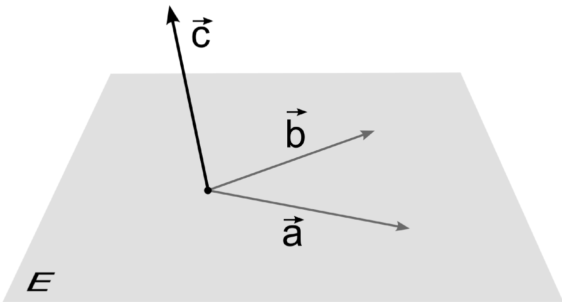

Abb. 10: Eine Basis

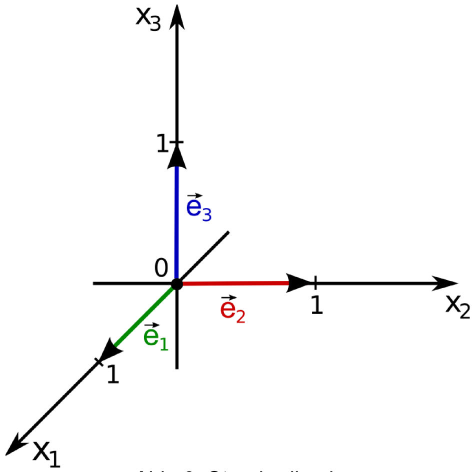

Abb. 9: Standardbasis

Für drei Vektoren $\vec{a}$**,** $\vec{b}$ und $\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden eine **Basis**

ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear unabhängig**

ii) Die **Determinante** $det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{\neq 0}$

Wichtige Ergebnisse

- Mittelpunkt M einer Strecke $[AB]$:

  $\boldsymbol{\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})}$

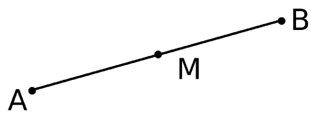

Abb. 11: Mittelpunkt

- Schwerpunkt S eins Dreickes $\Delta\, ABC$:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

Es gilt: Der Schwerpunkt S eins Dreieck ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 1 zu 2.

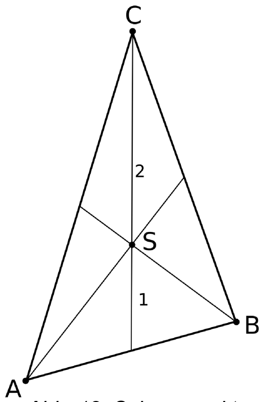

Abb. 12: Schwerpunkt

- Drei Punkte auf einer Linie:

  Es muss gelten: $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{c}-\vec{a} = \lambda\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$

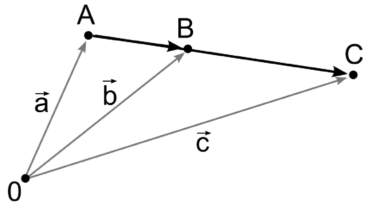

Abb. 13: Drei Punkte auf Geraden

- Vier Punkte in einer Ebene:

  Es muss gelten: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind linear abhängig, also $\boldsymbol{det}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AC}}, \overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) = \boldsymbol{0}$.

  Genau so können die drei Vektoren: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$ verwendet werden, etc. Wichtig ist nur, dass jeweils alle drei Repräsentanten vom **gleichen** Punkt aus gehen.

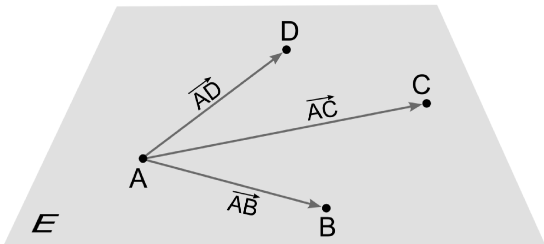

Abb. 14: Vier Punkte in einer Ebene