Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

1. Diskretes Wachstum (Zerfall)

Beispiel:

Verzinsung von Kapital: Startkapital $K_0 = 20$ (€), Jahreszins $p = 3\% = \frac{3}{100}$

Jahr	Kapital
0	$\underbrace{20}_{K_0}$
1	$\underbrace{20}_{K_0}+\frac{3}{100}\cdot\underbrace{20}_{K_0}=\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)}_{=:K_1}$
2	$\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)}_{K_1}+\frac{3}{100}\cdot\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)}_{K_1}=\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^2}_{=:K_2}$
3	$\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^2}_{K_2}+\frac{3}{100}\cdot\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^2}_{K_2}=\underbrace{20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^3}_{=:K_3}$
	$\dots$
n	$20\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^n$

Allgemein:

Ist

- a der Anfangswert zur Zeit $t=0$,
- p der prozentuale Zuwachs pro (Zeit)Einheit,

dann heißt $\boldsymbol{q := \left(1+\frac{p}{100}\right)}$ Wachstumsfaktor und es gilt für den Wert $N(t)$ nach t Zeitschritten:

$$\boxed{\boldsymbol{N(t) = a\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t = a\cdot q^t}}$$

Für $q>1$ spricht man von Wachstum, für $q<1$ (z.B. $q = 1-\frac{p}{100}$) von Abnahme oder Zerfall.

Aufgabe:

Im Jahre 0 wird 1 € mit 1% Jahreszins angelegt. Wann ist das Kapital auf ≥ 1000 € angewachsen und wie viele € wären es im Jahr 2013 ?

Lösung:

$N(t) = 1\,€ \cdot (1+0{,}01)^{\frac{t}{a}}$

$1000\,€ \leq f(t) = 1\,€ \cdot 1{,}01^{\frac{t}{a}} \Leftrightarrow 1000 \leq 1{,}01^{\frac{t}{a}} \Rightarrow \ln(1000) \leq \frac{t}{a} \cdot \ln(1{,}01)$

$\Rightarrow t = \frac{\ln(1000)}{\ln(1{,}01)}\, a \approx 694{,}22\, a.$

Das Kapital ist nach 695 Jahren auf über $1000\,€$ angewachsen.

$N(2013a) = 1\,€ \cdot 1{,}01^{\frac{2013a}{a}} \approx 499948678\,€$

Das Kapital würde 2013 also knapp 500 Millionen € betragen.

2. Kontinuierliches Wachstum (Zerfall)

Von einer ursprünglichen Menge N_0 des radioaktiven Elements ^{222}Rn (Radon) ist nach $T_{\frac{1}{2}} = 3{,}8$ Tagen nur noch die **Hälfte** vorhanden, der Rest ist zerfallen. $\boldsymbol{T_{\frac{1}{2}}}$ wird **Halbwertszeit** genannt.

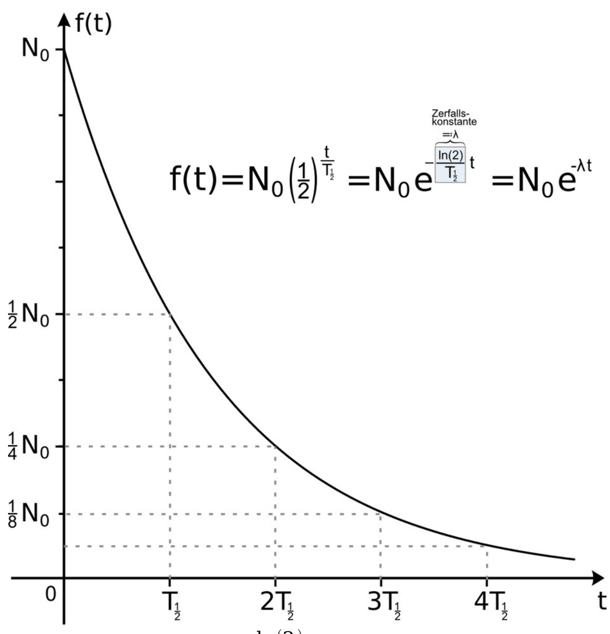
Mit der obigen Formel ergäbe sich

$N(t) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$, wobei hier jeder Zeitschritt t ein Vielfaches von $T = 3{,}8\,d$ ist ($d = Tag$), also $t = n \cdot T$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Will man t in Tagen einsetzten, ergibt sich:

$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$

Dies kann noch umgeformt werden:



$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{\ln(2^{-1}) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\ln(2) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{T} \cdot t}$$

Das ergibt das **Zerfallsgesetz:**

Mit der **Halbwertszeit** $\boldsymbol{T_{\frac{1}{2}}}$ und der **Zerfallskonstanten** $\boldsymbol{\lambda := \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}}$ gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{N(t) = M_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}}$$

Aufgabe:

Das bevorzugt für Atomwaffen eingesetzte Plutonium ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 24110\,a$.

Bestimmen Sie die Zerfallskonstante λ und berechnen Sie, wie viel Prozent von einem Kilogramm ^{239}Pu nach 1000 Jahren noch übrig ist.

Lösung:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln(2)}{24110\,a} \approx 2{,}874936 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{a}$$

$$N(t) = 1\,kg \cdot e^{\frac{\ln(2)}{24110\,a} \cdot t} \approx 1\,kg \cdot e^{-\frac{2{,}874936 \cdot 10^{-5}}{a} \cdot t}$$

$$N(1000\,a) = 1\,kg \cdot e^{\frac{-2{,}874936 \cdot 10^{-5}}{a} \cdot 1000\,a} \approx 0{,}971660\,kg$$

$$\frac{0{,}971660\,kg}{1\,kg} \approx \mathbf{97{,}166\,\%}$$

Nebenbei: Allgemeine Rechnung für Prozentsatz p:

$$p = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N_0 e^{-\lambda \cdot t}}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot t}$$

2.1 Radiokarbonmethode oder ^{14}C - Methode

Entwickelt 1946 von Willard Frank Libby (1908 – 1980), der dafür 1960 den Nobelpreis für Chemie erhielt. Dient zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen (meist organischen) Stoffen. Auflösung: ca. $300\,a$ bis $60\,000\,a$.

Funktionsweise:

Durch kosmische Strahlung entsteht in der Atmosphäre ständig radioaktiver Kohlenstoff ^{14}C mit der Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 5735\,a$. Das Verhältnis $k = \frac{^{14}C}{^{12}C}$ in der Atmosphäre ist über die Jahrtausende (relativ) konstant.

Pflanzen, die den Kohlenstoff über das Kohlendioxid der Luft aufnehmen und verstoffwechseln, weisen nun ebenfalls in ihrem Körper das gleiche Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C auf. Somit auch alle Organismen die diese Pflanzen fressen.

Stirbt nun ein solcher Organismus, fehlt der Nachschub an ^{14}C und das Verhältnis $\frac{^{14}C}{^{12}C} \rightarrow 0$ geht gegen Null mit der Zeit.

Durch messen der Zerfälle pro Probenmasse ($1\,g$ Kohlenstoff weißt ca. 16 Zerfälle pro Minute auf) kann damit das Alter der Probe bestimmt werden.

Beispiel:

$1\,g$ Kohlenstoff eines lebenden Organismus zeigt $16{,}0$ Zerfälle pro Minute.

Wie alt ist eine Probe eines mutmasslich prähistorischen Holzpfostens, der pro Gramm $12{,}2$ Zerfälle pro Minute zeigt?

Wie viele Zerfälle wären es, wenn die Probe aus der Zeit der Dinosaurier vor ca. 60 Millionen Jahren stammen würde?

$$\frac{12{,}2}{16{,}0}=\frac{N(t)}{N(0)}=\frac{1\,g\cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5735\,a}\cdot t}}{1\,g}=e^{-\frac{\ln(2)}{5735\,a}\cdot t}\ \Rightarrow\ \ln\left(\frac{12{,}2}{16{,}0}\right)=-\frac{\ln(2)}{5735\,a}\cdot t$$

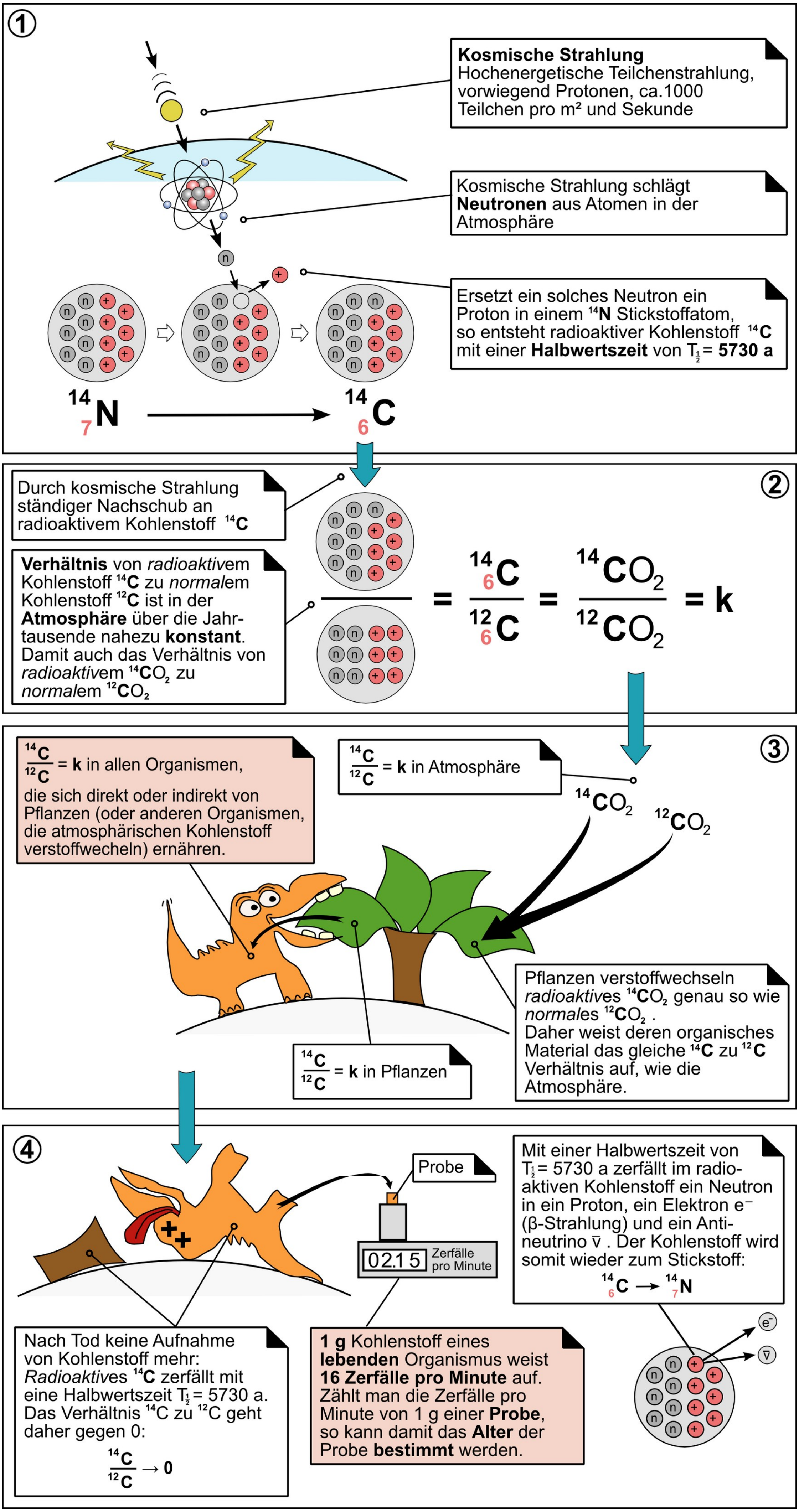
$$\Rightarrow\ t=-\frac{\ln\left(\frac{12{,}2}{16{,}0}\right)}{\ln(2)}\cdot 5735\,a\approx 2243\,a\approx 2{,}24\cdot 10^3\,a$$

Der Pfosten stammt also etwas vor der Zeit um Christi Geburt.

Zerfälle pro Gramm pro Minute nach $60\,000\,000$ Jahren:

$$16{,}0\cdot\frac{N(60\,000\,000\,a)}{g}=16\cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5735\,a}\cdot 60\,000\,000\,a}\approx e^{-7251{,}76}=10^{\log(e)\cdot(-7251{,}76)}\approx 10^{-3149{,}40}$$

Es müsste also mehr als das 10^{3142} -fache Alter des heutigen Universums auf einen Zerfall gewartet werden.



1
Kosmische Strahlung
Hochenergetische Teilchenstrahlung, vorwiegend Protonen, ca.1000 Teilchen pro m² und Sekunde
Kosmische Strahlung schlägt **Neutronen** aus Atomen in der Atmosphäre
n
Ersetzt ein solches Neutron ein Proton in einem ^{14}**N** Stickstoffatom, so entsteht radioaktiver Kohlenstoff ^{14}**C** mit einer **Halbwertszeit** von $T_{\frac{1}{2}}$ = **5730 a**
$^{14}_{7}\mathrm{N} \longrightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C}$
2
Durch kosmische Strahlung ständiger Nachschub an radioaktivem Kohlenstoff ^{14}**C**
Verhältnis von *radioaktiv*em Kohlenstoff ^{14}**C** zu *normal*em Kohlenstoff ^{12}**C** ist in der **Atmosphäre** über die Jahrtausende nahezu **konstant**. Damit auch das Verhältnis von *radioaktiv*em $^{14}CO_2$ zu *normal*em $^{12}CO_2$
$= \frac{^{14}_{6}C}{^{12}_{6}C} = \frac{^{14}CO_2}{^{12}CO_2} = \mathbf{k}$
3
$\frac{^{14}C}{^{12}C}$ = **k** in allen Organismen, die sich direkt oder indirekt von Pflanzen (oder anderen Organismen, die atmosphärischen Kohlenstoff verstoffwecheln) ernähren.
$\frac{^{14}C}{^{12}C}$ = **k** in Atmosphäre
$^{14}CO_2$
$^{12}CO_2$
Pflanzen verstoffwechseln *radioaktives* $^{14}CO_2$ genau so wie *normales* $^{12}CO_2$. Daher weist deren organisches Material das gleiche ^{14}**C** zu ^{12}**C** Verhältnis auf, wie die Atmosphäre.
$\frac{^{14}C}{^{12}C}$ = **k** in Pflanzen
4
Probe
02.1 5
Zerfälle pro Minute
Mit einer Halbwertszeit von $T_{\frac{1}{2}}$ = 5730 a zerfällt im radioaktiven Kohlenstoff ein Neutron in ein Proton, ein Elektron e^- (β-Strahlung) und ein Antineutrino $\bar{\nu}$. Der Kohlenstoff wird somit wieder zum Stickstoff:
$^{14}_{6}C \longrightarrow {}^{14}_{7}N$
e^-
$\bar{\nu}$
Nach Tod keine Aufnahme von Kohlenstoff mehr: *Radioaktives* ^{14}**C** zerfällt mit eine Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ = 5730 a. Das Verhältnis ^{14}C zu ^{12}C geht daher gegen 0:
$\frac{^{14}C}{^{12}C} \rightarrow 0$
1 g Kohlenstoff eines **lebenden** Organismus weist **16 Zerfälle pro Minute** auf. Zählt man die Zerfälle pro Minute von 1 g einer **Probe**, so kann damit das **Alter** der Probe **bestimmt** werden.