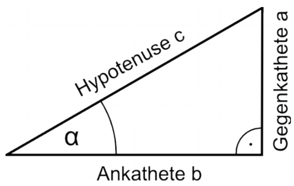
1.2. Sinus und Kosinus: Definition am Einheitskreis

1.2.1 Winkel zwischen 0° und 90° ($0 \leq \alpha < 90°$)

Bis jetzt wurde der Sinus für Winkel **zwischen 0° und 90°** ($0 \leq \alpha < 90°$) als Verhältnis von *Gegenkathete* und *Hypotenuse* im rechtwinkligen Dreieck definiert:

$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$, also $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$.



Einfaches Umstellen ergibt für die die Länge der *Gegenkathete* a *:*

$$a = \sin(\alpha) \cdot c \ .$$

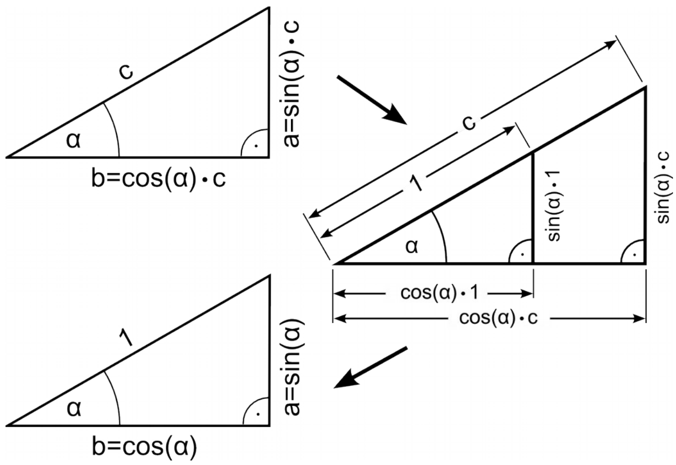
Da die Definition des $\sin(\alpha)$ unabhängig von der Größe des rechtwinkligen Dreiecks ist (Strahlensatz),
kann die Länge der *Hypotenuse* c mit $c = 1$ gewählt werden:

Die Länge der *Gegenkathete* a ist dann

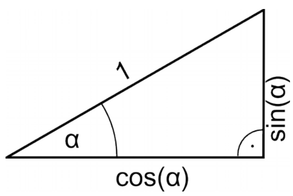
$$a = \sin(\alpha) \ ,$$

die Länge der *Ankathete* b

$$b = \cos(\alpha) \ .$$

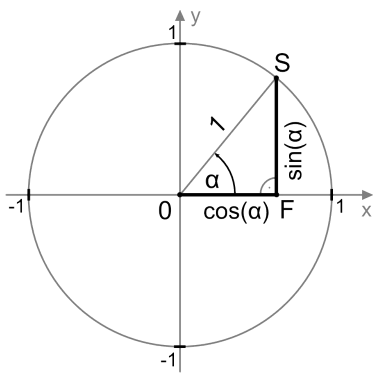


Der $\sin(\alpha)$ eines Winkels α ist also die Länge der *Gegenkathete*, der $\cos(\alpha)$ die A*nkathete* in einem rechtwinkligen Dreieck mit der *Hypotenusen*länge 1 .



Anders gesehen (*):

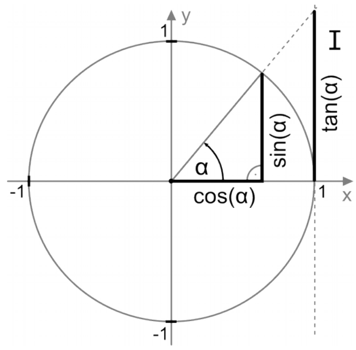
Zeichnet man den Winkel α wie in der Abbildung in den Einheitskreis ein, so ist $\sin(\alpha)$ die Länge des Lotes vom Punkt S auf der Kreislinie auf die x -Achse und der $\cos(\alpha)$ die Länge vom Ursprung 0 bis zum Fußpunkt F dieses Lotes.



1.2.2 Allgemeine Winkel

Dies Definition des Sinus/Kosinus am Einheitskreis für Winkel zwischen 0° und 90° lässt sich nun zwanglos zur Definition für **beliebige Winkel** erweitern:
Einfach wie oben den Winkel in den Einheitskreis einzeichnen. Vom entsprechenden Punkt auf der Kreislinie, das Lot auf die x -Achse fällen. $\sin(\alpha)$ ist dann die Länge des Lotes **mit Vorzeichen**, $\cos(\alpha)$ die Läge vom Ursprung bis zum Fußpunkt **mit Vorzeichen**:

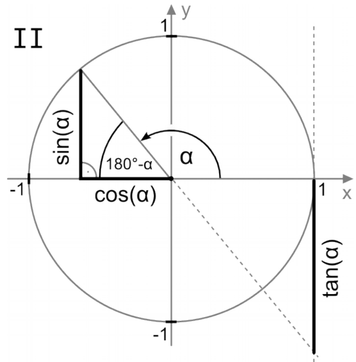
Quadrant I



Winkel: $0 \leq \alpha < 90°$

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Vorzeichen:	$+$	$+$	$+$

Quadrant II



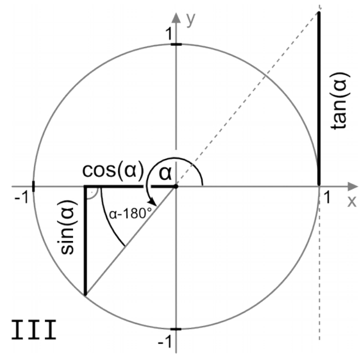
Winkel: $90° < \alpha < 180°$

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Vorzeichen:	$+$	$-$	$-$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(180° - \alpha) &&= \sin(\pi - \alpha) \\ \cos(\alpha) &= -\cos(180° - \alpha) &&= -\cos(\pi - \alpha) \\ \tan(\alpha) &= -\tan(180° - \alpha) &&= -\tan(\pi - \alpha) \end{aligned}$$

Quadrant III



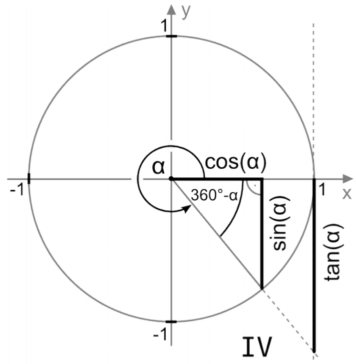
Winkel: $180° < \alpha < 270°$

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Vorzeichen:	$-$	$-$	$+$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= -\sin(\alpha - 180°) &&= -\sin(\alpha - \pi) \\ \cos(\alpha) &= -\cos(\alpha - 180°) &&= -\cos(\alpha - \pi) \\ \tan(\alpha) &= \tan(\alpha - 180°) &&= \tan(\alpha - \pi) \end{aligned}$$

Quadrant IV



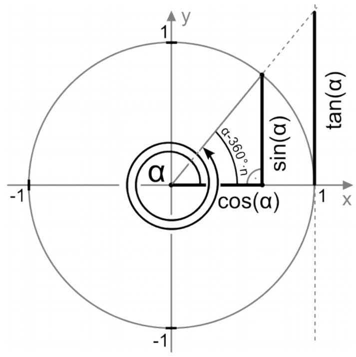
Winkel: $270° < \alpha < 360°$

	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
Vorzeichen:	$-$	$+$	$-$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= -\sin(360° - \alpha) &&= -\sin(2\pi - \alpha) \\ \cos(\alpha) &= \cos(360° - \alpha) &&= \cos(2\pi - \alpha) \\ \tan(\alpha) &= -\tan(360° - \alpha) &&= -\tan(2\pi - \alpha) \end{aligned}$$

Winkel > 360°



Winkel: $360° \cdot n \leq \alpha < 360° \cdot (n+1)$, $n \in \mathbb{N}^+$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha - 360° \cdot n) = \sin(\alpha - 2\pi \cdot n) \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha - 360° \cdot n) = \cos(\alpha - 2\pi \cdot n) \\ \tan(\alpha) &= \tan(\alpha - 360° \cdot n) = \tan(\alpha - 2\pi \cdot n) \end{aligned}$$

d.h., so lange 360° (2π) von α abziehen, bis der verbleibende Winkel zwischen 0° und 360 ° liegt.

Bsp.: $\alpha = 1070° = 350° + 360° \cdot 2 \Rightarrow \sin(1070°) = \sin(350°)$