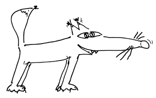
Hypothesentest



Hypothese: **nicht gesicherte** Aussage über Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
Hypothesentest: **Verfahren** zum **Entscheiden**, ob **Hypothesewahr** oder **falsch**.

Beispiel Tombola:

Veranstalter behauptet:

„Nur **$33,\bar{3}$%** der Lose sind Nieten“

H_0: Nullhypothese

N	N	G	G	G	G

$p=\frac{1}{3}$

Besucher behauptet:

„**50%** der Lose sind Nieten“

H_1: Gegenhypothese

N	N	N	G	G	G

$p=\frac{1}{2}$

Testgröße X: Anzahl der Nieten

Test: Besucher kauft z.B. **n=100** Lose

$$\mathbf{x \in A} = \{\, 0, 1, 2, 3, \ldots, \mathbf{k} \,\} \mid \{\, \mathbf{k+1}, k+2, \ldots, n \,\} = \mathbf{\bar{A} \ni x}$$

Annahmebereich | **Ablehnungsbereich**

kritische Zahl

Nur zum Verständnis, wählen wir in diesem Beispiel willkürlich eine kritische Zahl, z.B. **k=40**

0 1 2 3 4 ... 39 **40** | 41 42 43 44 ... 100

k n

Liegt die Anzahl der Nieten unter 100 gezogenen Losen

im Annahmebereich, sagt man:
"Die Hypothese **H_0 wird angenommen**"

Falls der **Besucher doch recht** hat, aber zufällig zu wenige Nieten gezogen wurden, wird die (**falsche**) **Annahme H_0** des Veranstalters **irrtümlich beibehalten**!

Dieser Fehler heißt
β-Fehler oder **Fehler 2-ter Art**

$\boldsymbol{\beta} = P(x \in A) = P(X \leqq 40) = F(100; \boxed{\tfrac{1}{2}}; 40)$
$\quad \boldsymbol{\approx 2{,}48\%}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,48% wird also die Annahme des Veranstalters irrtümlich beibehalten, wenn die Anzahl der Nieten unter 100 gezogenen Losen höchstens 40 beträgt.

im Ablehnungsbereich, sagt man:
"Die Hypothese **H_0 wird abgelehnt (verworfen)**"

Falls der **Veranstalter doch recht** hat, aber zufällig zu viele Nieten gezogen wurden, wird die (**richtige**) **Annahme H_0** des Veranstalters **irrtümlich zurückgewiesen**!

Dieser Fehler heißt
α-Fehler oder **Fehler 1-ter Art**

$\boldsymbol{\alpha} = P(x \in \bar{A}) = P(X \geqq 41) = 1 - P(X < 41)$
$\quad = 1 - P(X \leqq 40) = 1 - F(100; \boxed{\tfrac{1}{3}}; 40) = 1 - 0{,}9341$
$\quad \boldsymbol{\approx 6{,}59\%}$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 6,59% wird also die Annahme des Veranstalters irrtümlich zurückgewiesen, wenn die Anzahl der Nieten unter 100 gezogenen Losen mehr als 40 beträgt.

Beachte:
Wird k klein gewählt, so minimiert man zwar den β-Fehler, vergrößert aber den α-Fehler!
Wird k groß gewählt, so minimiert man zwar den α-Fehler, vergrößert aber den β-Fehler!

Das hat auch gesellschaftliche Auswirkungen, z.B.
will ich jeden Verbrecher erwischen, sperre ich auch zwangsweise viele Unschuldige ein,
will ich keine Unschuldigen einsperren, gehen mir zwangsweise viele Verbrecher durch die Lappen!

Einseitiger Signifikanztest

Beim einseitigen Signifikanztest will man seine
Nullhypothese H_0 auf dem **Signifikanzniveau α** absichern,
d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass meine Annahme **H_0 irrtümlich zurückgewiesen wird** soll nicht größer als das gegebene **Signifikanzniveau α** (**α-Fehler** / **Fehler 1-ter Art**) sein.

Üblich ist für das **Signifikanzniveau α:**

α = 0,05	= 5%	Medizin, Psychologie, Wirtschaft etc..
α = 0,01	= 1%	-""-
α = 0,001	= 1‰	Physik

Es muss also der kritische Wert **k so gewählt werden,** dass der **α-Fehler kleiner/gleich dem gegebenen Signifikanzniveau** ist**.**

Allgemeines Vorgehen:

0) n: Länge der Stichprobe, k: kritische Zahl des Ablehnungsbereichs
1) Testgröße X festlegen
2) H_0 (Nullhypothese) und H_1 (Gegenhypothese) festlegen
3) Signifikanzniveau α festlegen
4) Aus diesen Daten die kritische Zahl k ermitteln,
   d.h. den größtmöglichen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese H_0
5) Testentscheidung:
   $X \in \overline{A} \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt zu Gunsten von H_1
   $X \in A \Rightarrow H_0$ wird nicht abgelehnt, also beibehalten

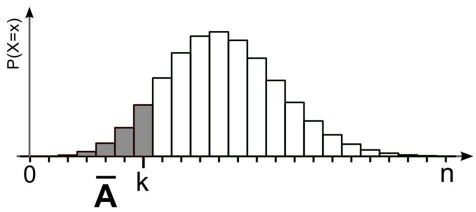
Linksseitiger Test

Gegenhypothese

$H_1 : p < p_0$ $\quad$ $H_0 : p = p_0$

0 ——— p_0 ——— n

$\overline{\mathbf{A}}$={ 0,1, ... , **k** } $\quad p_0$
Ablehnungsbereich



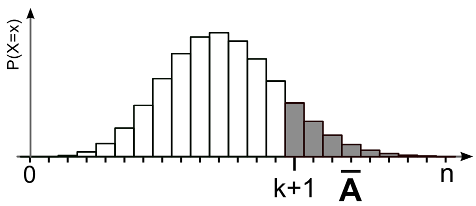
Rechtsssseitiger Test

Gegenhypothese

$p = p_0 : H_0$ $\quad$ $H_1 : p > p_0$

0 ——— p_0 ——— n

p_0 $\quad \overline{\mathbf{A}}$={ **k+1**, k+2, ... , n }
Ablehnungsbereich



kritische Zahl k des Ablehnungsbereichs $\overline{A}$ bestimmen:

Linksseitiger Test:

$P(X \leqq \mathbf{k}) \leqq \alpha$
also: $F(n; p; \mathbf{k}) \leqq \alpha$

größte natürliche Zahl
aus der Tabelle, die diese
Bedingung erfüllt

$\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{A}}$={ 0,1, ... , **k** } und **A**={ **k**+1**, ... , n** }

Rechtsseitiger Test:

$P(X \geqq \mathbf{k+1}) \leqq \alpha$
$\Leftrightarrow$ $1 - P(X < \mathbf{k+1}) \leqq \alpha$
$\Leftrightarrow$ $1 - P(X \leqq \mathbf{k}) \leqq \alpha$
$\Leftrightarrow$ $P(X \leqq \mathbf{k}) \geqq 1 - \alpha$
also: $F(n; p; \mathbf{k}) \geqq 1 - \alpha$

kleinste natürliche Zahl
aus der Tabelle, die diese
Bedingung erfüllt

$\Rightarrow$ **A**={ 0,1, ... , **k** } und $\overline{\mathbf{A}}$={ **k**+1**, ... , n** }