2003 SI

1 In einem Mischwald wird eine Versuchsfläche auf Schäden durch Wildverbiss an den Jungtrieben der Bäume untersucht. Einzige Nadelbaumart ist die Fichte (F); sie macht 25 % des Baumbestandes aus. Auf der Versuchsfläche befinden sich außerdem 45 % Buchen (B), ansonsten Eichen (E). Alle Baumarten kommen auf der Fläche gleichmäßig verteilt vor.
Bei einer Zählung werden folgende Schadensanteile durch Verbiss unter den jeweiligen Baumarten beobachtet: 20 % bei Fichten, 30 % bei Buchen und 25 % bei Eichen.

1.3 Nun werden innerhalb der Versuchsfläche 20 Bäume zufällig ausgewählt.

1.3.1 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen mehr als fünf Fichten befinden.

1.3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der Laubbäume höchstens um 2 vom Erwartungswert abweicht.

1.4 Bei einer Waldbegehung wird vermutet, dass sich der Schadensanteil bei Fichten (siehe 1.0) vergrößert hat (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen, werden 200 zufällig ausgewählte Fichten auf Wildverbiss untersucht. Sind hiervon mehr als 50 geschädigt, wird diese Vermutung als bestätigt angesehen.

1.4.1 Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit man sich irrtümlich für eine Vergrößerung des Schadensanteils entscheidet.

2003 SII

Ein Hersteller von Kopierern bietet ein bestimmtes Gerät in zwei verschiedenen Qualitäten an: in einer hochwertigen (H) und in einer einfachen (E). Ein Gerät des Typs E liefert im Schnitt weniger gute Kopien als ein Gerät des Typs H.

1 Die Testabteilung der Firma hat in einer Versuchsreihe herausgefunden, dass unter gleichen Bedingungen beim Typ H im Schnitt 45 von 50 Kopien einwandfrei sind; beim Typ E sind im Schnitt 20 % der Kopien fehlerhaft.

1.1 Bestimmen Sie jeweils auf 3 Nachkommastellen gerundet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gerät des Typs H bei einer Serie von 50 Kopien
a) mehr als 40 einwandfreie Kopien liefert.
b) am Anfang 49 gute, dann 1 fehlerhafte Kopie liefert.

1.2 Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Anzahl der guten Kopien für ein Gerät E bei einer Serie von 50 Kopien innerhalb der einfachen Standardabweichung um den zugehörigen Erwartungswert liegt.

2 Ein Käufer hat ein Gerät des Typs H erworben. Er kennt die Untersuchungsergebnisse des Herstellers. Nach einem halben Jahr regelmäßiger Benutzung vermutet der Käufer jedoch, dass eine erkennbare Verschlechterung der Kopierqualität eingetreten sei (Gegenhypothese). Er führt einen Test durch und macht 50 Kopien von einer bestimmten Originalseite. Erhält er dabei mehr als 42 einwandfreie Kopien, so will er von seiner Meinung wieder abrücken.

2.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Käufer nach der Stichprobe irrtümlich von einer Verschlechterung der Kopierqualität ausgeht.

2.3 Der misstrauische Käufer ändert sein Testverfahren ab. Er belässt den Stichprobenumfang bei 50 Kopien. Ermitteln Sie, wie viele schlechten Kopien er mindestens finden muss, damit die Irrtumswahrscheinlichkeit, den Kopierer fälschlicherweise für zu schlecht zu halten, höchstens zwei Prozent beträgt.

2005 SI

2.0 An der Kasse des Erlebnisparks werden Bargeld und Kreditkarten akzeptiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Besucher mit Bargeld bezahlt, beträgt p. Es werden im Folgenden 12 zufällig ausgewählte Personen betrachtet.

2.1 Berechnen Sie für den Fall $p = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 12 Personen mindestens 11 mit Bargeld bezahlen.

2.2 Ermitteln Sie, wie groß p mindestens sein müsste, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,5 alle 12 Personen mit Bargeld bezahlen.

4 Ein Achterbahnzug besitzt 40 Sitzplätze. Am Wochenende ist ein Sitzplatz mit der Wahrscheinlichkeit 0,9 besetzt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der freien Plätze bei einer zufällig ausgewählten Fahrt an.
Untersuchen Sie, ob der Wert $x = 6$ der Zufallsgröße X innerhalb der doppelten Standardabweichung um den Erwartungswert liegt.

6 Auf vielfache Nachfrage bietet das Parkrestaurant mehr fleischlose Gerichte an als früher. Durch einen Test soll herausgefunden werden, ob sich dadurch der Anteil der verkauften fleischlosen Gerichte gegenüber bisher 30 % erhöht hat (Gegenhypothese). Hierzu werden die Essensbestellungen von 200 zufällig ausgewählten Gästen ausgewertet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 71 fleischlose Gerichte bestellt werden, wenn der Anteil der fleischlosen Gerichte wie bisher bei 30% liegt.

Lösungen

2003, SI,

1.3.1 X: Anzahl der Fichten unter n = 20 Bäumen; p = 0,25

Ges.: $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_{0,25}^{20}(5) \approx 1 - 0{,}61717 = 0{,}38283$ (TW)

1.3.2: X: Anzahl der Laubbäume von n = 20; p = 0,75

Bei Bernoulli E(X) mit der einfachen Formel: $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0{,}75 = 15$

Ges.: $P(x \in [15 - 2; 15 + 2]) = P(x \in [13; 17]) = F_{0,25}^{20}(17) - F_{0,25}^{20}(12) \approx 0{,}90874 - 0{,}10181 = 0{,}80693$ (TW)

1.4.1 X: Anzahl der Fichten mit Wildverbiss von n = 200; p = 0,2

„**Erhöhung** des Verbissanteils ist **irrtümlich**", bedeutet: der Verbissanteil ist tatsächlich immer noch bei **p = 0,2**.

Unter dieser Voraussetzung ist nun gesucht:

$P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - F_{0,2}^{200}(50) \approx 1 - 0{,}96550 = 0{,}03450$

2003, SII

1.1 a) X: Anzahl der einwandfreien Kopien auf Gerät H von n = 50; $p = \frac{45}{50} = 0{,}9$

$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 1 - F_{0,9}^{50}(40) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$

---

b) Bernoulli nicht anwendbar, da eine feste Reihenfolge vorgegeben ist. Der Ast im Baum, der dies darstellt:

e: „einwandfreie Kopie": --e—e—e—e……..—e— $\overline{e}$

Mit A: „erst 49 einwandfreie, dann eine fehlerhafte Kopie" gilt: $P(A) = 0{,}9^{49} \cdot 0{,}1 \approx 0{,}001$

1.2 X: Anzahl der einwandfreien Kopien auf Gerät E von n = 50; $p = 0{,}8$

Bei Bernoulli E(X) mit der einfachen Formel: $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}8 = 40$

$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{40 \cdot 0{,}2} = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

Ges.: $P(x \in]40 - 2{,}83; 40 + 2{,}83[\,) = P(x \in]37{,}17; 42{,}83[\,) = P(x \in \{38; 39; 40; 41; 42\}) = F_{0,8}^{50}(42) - F_{0,8}^{50}(37) \approx 0{,}80959 - 0{,}18606 = 0{,}62353$

2.2 X: Anzahl der <u>einwandfreien Kopien</u> von n = 50; p = 0,9

Gegenhypothese annehmen ist ein Irrtum, d.h. p = 0,9 stimmt.

Dann gefragt: $P(X \leq 42) = F_{0,9}^{50}(42) \approx 0{,}122$

2.3 X: Anzahl der <u>fehlerhaften</u> Kopien von n = 50; p = 0,1

Gefragt ist die Mindestanzahl **k** von fehlerhaften Kopien bei einer tatsächlichen Treffer-Wahrscheinlichkeit von p = 0,9 so, dass die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als k fehlerhafte auftreten bei höchstens 2% liegt.

$P(X > k) \leq 0{,}02$

$1 - P(X \leq k) \leq 0{,}02 \Rightarrow 1 - F_{0,1}^{50}(k) \leq 0{,}02 \Rightarrow F_{0,1}^{50}(k) \geq 0{,}98 \Rightarrow\ k_{\min} = 10$

Er muss mindestens 10 schlechte, bzw. er darf höchstens 40 gute finden, damit der Irrtum, den Kopierer für zu schlecht zu halten, obwohl er es nicht ist, bei diesem Test maximal 2% beträgt.

2005, SI

2.1 X: Anzahl der Personen, die mit Bargeld zahlen von n = 12; p = 0,8

Ges.: $P(X \geq 11) = B(12; 0{,}8; 11) + B(12; 0{,}8; 12) = \binom{12}{11} \cdot 0{,}8^{11} \cdot 0{,}2 + 0{,}8^{12} \approx 0{,}27488$ (nicht mit TW möglich)

2.2 X: Anzahl der Personen, die mit Bargeld zahlen von n = 12; p = ?

$P(X = 12) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow\ B(12; p; 12) \geq 0{,}5 \Leftrightarrow p^{12} \geq 0{,}5 \underbrace{\Rightarrow}_{da\ p>0} p \geq \sqrt[12]{0{,}5} \approx 0{,}944$

Probe: $B(12; 0{,}944; 12) = 0{,}944^{12} \approx 0{,}5008$ (in Ordnung)

---

4. X: Anzahl der <u>freien</u> Sitzplätze von n = 40; p = 0,1

$E(X) = \mu = 40 \cdot 0{,}1 = 4; \sigma(X) = \sqrt{4 \cdot 0{,}9} = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}90$

x = 6 aus dem 2-Sigma-Intervall um μ?

$6 \in]4 - 2 \cdot 1{,}9; 4 + 2 \cdot 1{,}9[$? ; $6 \in]0{,}2; 7{,}8[$?; Richtig! $6 \in]0{,}2; 7{,}8[$.

---

6. X: Anzahl der bestellten fleischlosen Gerichte von n = 200;

P liegt bei 30%, d.h. p = 0,3. Dann gesucht: $P(X \geq 71) = 1 - P(X \leq 70) = 1 - F_{0,3}^{200}(70) \approx 1 - 0{,}94579 = 0{,}05421$