II. Halbjahr, 2. Schulaufgabe aus der Mathematik: Lösungsvorschlag

Datum:	2019-07-03	**Zeit:**	70 min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung, Taschenrechner	**Klasse:**	BWVu

Algebra & Analysis

BE

1 In einem Betrieb werden Säfte aus Konzentrat hergestellt. Für eine Flasche „Premium“ werden *4* Einheiten Konzentrat mit *5* Einheiten Wasser gemischt, für eine Flasche „Qualität“ dagegen *3* Einheiten Konzentrat mit *7* Einheiten Wasser. Zusammen werden *65* Einheiten Konzentrat und *117* Einheiten Wasser verarbeitet.
Stellen Sie ein Gleichungssytem auf, mit dem sich berechnen lässt, wie viele Flaschen „Premium“ und wie viele Flaschen „Qualität“ abgefüllt werden. / 2

Lösung:

Mit den Bezeichnungen: p für „Premium“ und q für „Qualität“ gilt:

$$\begin{array}{rcrcrl} 4p & + & 3q & = & 65 & (\mathit{Gleichung\ der\ Konzentrat-Einheiten}) \\ 5p & + & 7q & = & 117 & (\mathit{Gleichung\ der\ Wasser-Einheiten}) \end{array}$$

---

2 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $\begin{cases} 4a - 2b + c = -3 \\ a - 5b - 2c = -3 \\ 9a + 3b + c = 12 \end{cases}$. / 5

Berechnen Sie a, b und c.

Lösung:

4	-2	1	-3	
1	-5	-2	-3	$\mid II+2\cdot I$
9	3	1	12	$\mid III-I$
4	-2	1	-3	
9	-9	0	-9	$\mid II:9$
5	5	0	15	$\mid II:5$
4	-2	1	-3	$\mid I-2\cdot II$
1	-1	0	-1	
1	1	0	3	$\mid III+II$
2	0	1	-1	$(a=1,b=2) \Rightarrow 2a+c=-1 \Rightarrow 2+c=-1 \Rightarrow \mathbf{c=-3}$
1	-1	0	-1	$(a=1) \Rightarrow a-b=-1 \Rightarrow 1-b=-1 \Rightarrow \mathbf{b=2}$
2	0	0	2	$\Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \mathbf{a=1}$

3.0 Gegeben ist die Funktionenschar $p_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_a(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + a + 4$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$. Die zugehörigen Graphen werden mit P_a bezeichnet.

3.1 Bestimmen Sie Lage und Art der Nullstellen von p_a in Abhängigkeit vom Parameter a. / 6

[Mögliche Diskriminante: $D_a = 2a+9$]

Lösung:

Mögliche Nullstellen:

$$p_a(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}x^2+x+a+4=0 \;\overset{|\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\; \frac{1}{2}x^2-x-a-4=0$$

$$\Rightarrow\; x_{1/2}=1\pm\sqrt{1-2\cdot(-a-4)}=1\pm\sqrt{2a+9}$$

Diskriminante $D_a=2a+9=2(a+4{,}5)$

$\Rightarrow$ D_a ist eine lineare Funktion mit positivem Steigungsfaktor und der Nullstelle $a_0 := -4{,}5$.

Es gilt also:

- $D_a<0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a\in\,]-\infty;-4{,}5[} \;\Rightarrow\; p_a$ besitzt keine Nullstellen.
- $D_a=0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a=-4{,}5} \;\Rightarrow\; p_a$ besitzt genau **eine** Nullstelle: $\boldsymbol{x_1=x_2=1}$. Diese ist **zweifach**.
- $D_a>0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a\in\,]-4{,}5;\infty[} \;\Rightarrow\; p_a$ besitzt genau **zwei** Nullstellen $\boldsymbol{x_1}$ und $\boldsymbol{x_2}$. Diese sind je **einfach**.

3.2.0 Im Folgenden ist $a=-2{,}5$ es ist also $p_{-2,5}(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$.

3.2.1 Geben Sie den Funktionsterm $p_{-2,5}(x)$ soweit wie möglich in Linearfaktoren zerlegt an. / 3

Lösung:

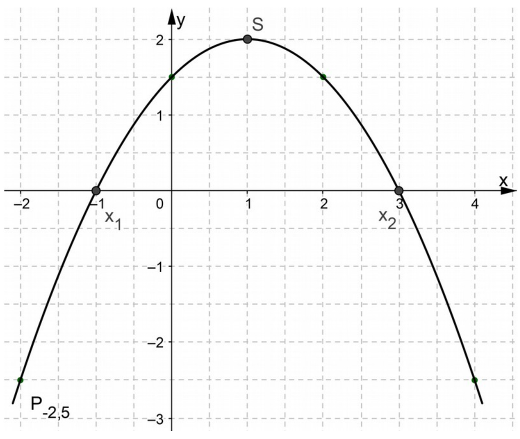
Nach **3.1** ist $x_{1/2}=1\pm\sqrt{2\cdot\underbrace{(-2{,}5)}_{a}+9}=1\pm\sqrt{4}=1\pm2 \;\Rightarrow\; x_1=-1,\; x_2=3$.

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{p_{-2,5}(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)}$$

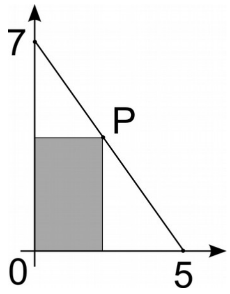
Alternativ: $\boldsymbol{p_{-2,5}(x)}=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\overset{Vieta!}{=}\boldsymbol{-\frac{1}{2}(x+1)(x-3)}$

3.2.2 Zeichen Sie $P_{-2,5}$ für $-2\le x\le 4$ **sorgfältig** in ein kartesisches Koordinatensystem. / 3
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,LE=1\,cm$.
Die x-Koordinaten der ermittelten Punkte sollen dabei höchstens einen Abstand von $1\,LE$ aufweisen!

Lösung:



4 Aus einem dreieckigen Stück Blech soll – wie in nebenstehender Skizze – ein möglichst großes Rechteck ausgeschnitten werden. / 5



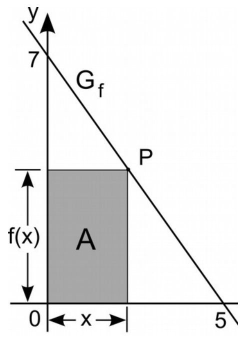
Ermitteln Sie die Breite x und die Höhe y dieses Rechtecks.

$\left[\textit{Teilergebnis: Flächenfunktion des Rechtecks: } A(x) = -\frac{7}{5}x(x-5)\right]$

Lösung:

Zielfuntion aufstellen:

Mit den Bezeichnungen in nebenstehender Skizze gilt:



Die Funktionsgleichung der Geraden G_f ist $f(x) = -\frac{7}{5}x+7$.

P liegt auf G_f, sonst wäre die Rechteckfläche $A(x)$ nicht maximal, also ist $A(x)=x\cdot f(x) = x\left(-\frac{7}{5}x+7\right) = -\frac{7}{5}x(x-5)$

Optimum berechnen:

Beim Scheitel $S(x_{max}, A_{max})$ ist $A(x)$ maximal, da der Graph von $A(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Wegen $A(x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=5$ folgt sofort:

$$p_x = x_{max} = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{0+5}{2} = \mathbf{2{,}5} = \textbf{ Breite } \boldsymbol{x}$$

$$p_y = f(p_x) = -\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{2}+7 = \frac{7}{2} = \mathbf{3{,}5} = \textbf{ Höhe } \boldsymbol{y}$$

Geometrie

5 Die Flächenmaßzahl eines gleichseitigen Dreiecks beträgt $A=\sqrt{3}$. / 2

Berechnen Sie die Seitenlänge a des Dreiecks.

Lösung: $\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = A = \sqrt{3} \overset{|:\sqrt{3}\ |\cdot 4}{\Leftrightarrow} a^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{a = 2}$

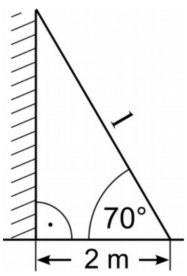
6 Eine Leiter lehnt an einer senkrechten Hauswand. Der Winkel zwischen waagrechtem Boden und der Leiter beträgt 70°. Der Fuß der Leiter ist 2 m von der Wand entfernt. / 3

Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Länge der geraden Leiter auf zwei Stellen genau.

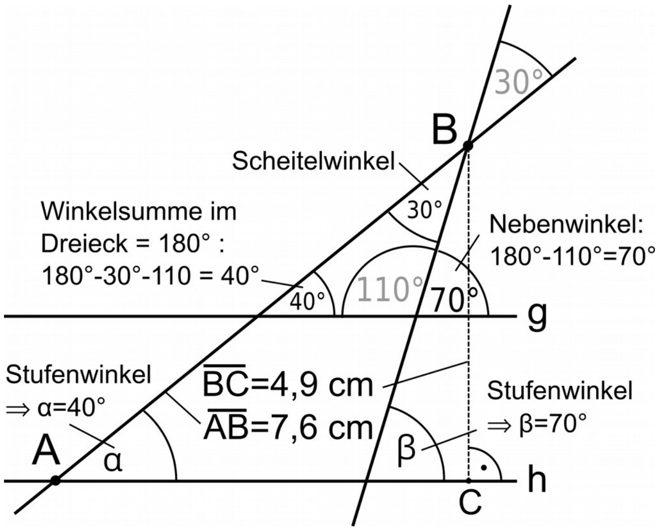
Lösung:

Mit den Bezeichnungen nebenstehender Skizze gilt:

$$\frac{2\,m}{l} = \cos(70°) \overset{|\cdot l\ |:\cos(70°)}{\Rightarrow} \boldsymbol{l} = \frac{2\,m}{\cos(70°)} \approx 5{,}8476\,m \approx \mathbf{5{,}8\,m}$$



7.0 Gegeben ist die nebenstehende, **nicht** maßstabsgerechte, Figur mit $g \parallel h$.



7.1 Ermitteln Sie – nachvollziehbar – die Größen der Winkel α und β. / 3

Lösung:

Siehe nebenstehnde Skizze.

7.2 Lesen Sie mit dem Lineal geeignete Längen aus der Figur ab und berechnen Sie damit nachvollziehbar den Winkel α **der Figur** auf 2 Stellen genau. / 2

Lösung:

Mit den Bezeichnungen obenstehender Skizze gilt:

$$\frac{GK}{HY} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \approx \frac{4{,}9\,cm}{7{,}6\,cm} \approx 0{,}6447 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\alpha \approx 40{,}1°}$$

7.3 Nun sei $A(-1|-2)$ und $B(5|6)$ gegeben. Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{AB}$. / 2

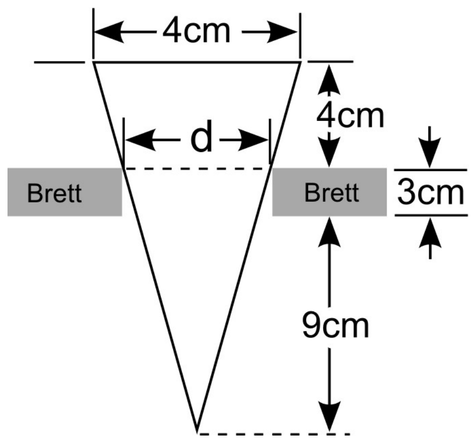
Lösung:

$$\boldsymbol{\overline{AB}} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(5-(-1))^2+(6-(-2))^2} = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} \;\boldsymbol{= 10}$$

---

8 Ein Keil steckt wie in nebenstehender Skizze in einem Loch eines 3 cm dicken Bretts. Seine obere Seite ist dabei parallel zum Brett. / 3

Berechnen Sie anhand der Maße der Skizze die Breite d des Spalts in dem der Keil steckt.



Lösung:

Mit dem Strahlensatz (und ohne Einheiten) gilt: $\frac{d}{4} = \frac{3+9}{3+9+4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; d = 3$

Die Breite d des Spalts beträgt somit $3\,cm$.

Für eine saubere und ansehnliche Ausführung wird eine Bewertungseinheit vergeben! / 1

$\sum$ **Gesamt** **/ 40**