2. Halbjahr, 1. Schulaufgabe aus der Mathematik: Lösungsvorschlag

Datum: 2019-05-20 **Zeit:** 70 min.

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung, Taschenrechner **Klasse:** BWVu

Algebra & Analysis

BE

1.0 Bestimmen Sie nachvollziehbar für folgende Ungleichungen in der Variablen $x \in \mathbb{R}$ jeweils die Lösungsmenge L : / 6

Lösung:

1.1 $x-1<2 \overset{|+1}{\Leftrightarrow} x<3 \Rightarrow \boldsymbol{L=]-\infty;3]}$

1.2 $\underbrace{\underbrace{x^2}_{\geq 0}+1}_{\geq 1}>0 \Rightarrow \boldsymbol{L=\mathbb{R}}$

1.3 $\underbrace{-3(x-2)^2(x+1)(x+2)}_{=:q(x)} \geq 0$

Nullstellen: -2 (einfach, mVzw), -1 (einfach, mVzw), 2 (doppelt, oVzw)

VZT:

$TW: \; q(3)=-3(3-2)^2(3+1)(3+2)=-3\cdot1\cdot4\cdot5=-60<0$

$\boldsymbol{x}$		mVzw -2		mVzw -1		oVzw 2	TW 3
$\boldsymbol{q(x)}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$\Rightarrow \boldsymbol{L=[-2;-1]\cup\{2\}}$

2.0 Gegeben ist die quadratische Funktion $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\; x\mapsto -\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$.

Der Graph von p wird mit P bezeichnet.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts von P **und** geben Sie den Funktionsterm $p(x)$ in Scheitelpunktform an. / 4

Lösung:

Koordinaten des Scheitelpunkts $S(x_s;\, y_s)$:

$$\boldsymbol{x_s}=\frac{-B}{2A}=\frac{-2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\boldsymbol{=2} \Rightarrow \boldsymbol{y_s}=p(x_s)=-\frac{1}{2}\cdot2^2+2\cdot2-\frac{1}{2}\boldsymbol{=1{,}5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{p(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{3}{2}}$$

Viel Erfolg!

2.2 Ermitteln Sie die Nullstellen von p **und** geben Sie den Funktionsterm $p(x)$ soweit wie möglich in Linearfaktoren zerlegt an. / 4

Lösung:

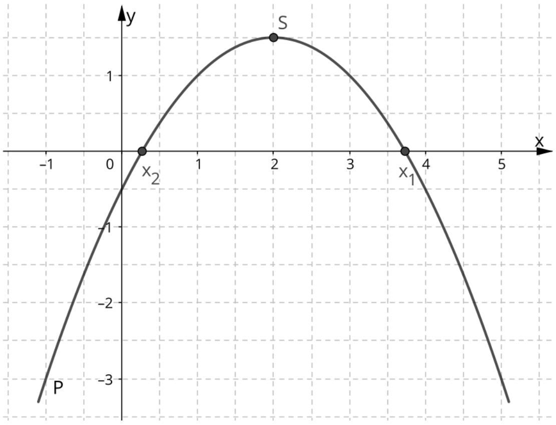
Nullstellen: $-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}\overset{|\cdot(-1)}{=}0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}=0$

$\Rightarrow x_{1/2}=2\pm\sqrt{4-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\mathbf{2\pm\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \boldsymbol{p(x)=-\frac{1}{2}(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}$

2.3 Zeichen Sie P für $-1\leq x\leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Tragen Sie auch die Nullstellen und den Scheitelpunkt ein. Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\mathrm{LE}=1\,cm$. / 3

Lösung:



2.4.0 Gegeben ist nun die Funktionenschar $g_a:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ g_a(x)=(a+2)x+a+1$, mit dem Parameter $a\in\mathbb{R}$. die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.

2.4.1 Zeigen Sie, dass die G_a ein Geradenbüschel bilden und geben Sie den Büschelpunkt B an. / 4

Lösung:

$g_a(x)=(a+2)x+a+1=(a+2)x+a+1+\underbrace{1-1}_{=0}=(a+2)x+(a+2)-1=(a+2)(x+1)-1$

$\Rightarrow\{G_a\colon a\in\mathbb{R}\}$ bilden ein Geradenbüschel mit dem Büschelpunkt $B(-1;-1)$.

Alternativ:

Wähle $a=-1$ und $a=-2$: $g_{-1}(x)=x$ und $g_{-2}(x)=-1$

Möglicher Büschelpunkt $B(x_B;\,y_B)$:

$g_{-1}(x)=g_{-2}(x) \Leftrightarrow x=-1 =: x_B$

$y_B:=g_a(x_B)=(a+2)\cdot(-1)+a+1=-a-2+a+1=-1$, unabhängig von a

$\Rightarrow\{G_a\colon a\in\mathbb{R}\}$ bilden ein Geradenbüschel mit dem Büschelpunkt $B(-1;-1)$.

2.4.2 Berechnen Sie die Schnittstellen von P und G_a in Abhängigkeit vom Parameter a. / 8

[Mögliche Diskriminante: a^2-2a-3]

Lösung:

Mögliche Schnittstellen: $g_a(x)=p(x) \overset{|-p(x)}{\Leftrightarrow} g_a(x)-p(x)=0$

$$\Leftrightarrow \quad (a+2)x+a+1-(-0{,}5x^2+2x-0{,}5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad ax+2x+a+1+0{,}5x^2-2x+0{,}5 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{0{,}5x^2}_{A}\underbrace{+ax}_{B}\underbrace{+a+1{,}5}_{C} = 0$$

$\Rightarrow \quad x_{1/2}=-a\pm\sqrt{a^2-4\cdot 0{,}5\cdot(a+1{,}5)}=-a\pm\sqrt{a^2-2a+3}$

$\Rightarrow$ Diskriminante $D_a=a^2-2a+3 \overset{Vieta!}{=} (a-3)(a+1)$

$\Rightarrow$ $a_1 := -1$ und $a_2 := 3$ sind die zwei je einfachen (mVzw) NST von D_a.

D_a ist quadratische Funktion mit positivem Leitkoeffizienten, somit gilt:

$D_a<0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a\in]-1;3[} \;\Rightarrow$ keine Schnittstellen

$D_a>0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a\in\mathbb{R}\setminus[-1;3]} \;\Rightarrow$ zwei Schnittstellen x_1 und x_2.

$D_a=0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a\in\{-1;3\}} \;\Rightarrow$ genau eine Berührstelle $x_1=x_2=\begin{cases}1 & \text{für } a=-1\\ -3 & \text{für } a=3\end{cases}$

---

3 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die durch die Punkte $A(-2;-13)$, $B(2;3)$ und $C(3;-3)$ verläuft. / 8

Lösung:

Ansatz: $ax^2+bx+c=y$

Einsetzten von

$$\begin{array}{llllll} A: & a\cdot(-2)^2 & +b\cdot(-2) & +c & =-13 & \Leftrightarrow & 4a & -2b & +c & =-13\\ B: & a\cdot 2^2 & +b\cdot 2 & +c & =3 & \Leftrightarrow & 4a & +2b & +c & =3\\ C: & a\cdot 3^2 & +b\cdot 3 & +c & =-3 & \Leftrightarrow & 9a & +3b & +c & =-3\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&1&-13\\4&2&1&3\\9&3&1&-3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II-I\\III-I\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&1&-13\\0&4&0&16\\5&5&0&10\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II:4\\III:5\end{array}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&1&-13\\0&1&0&4\\1&1&0&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow\ 4\cdot(-2)-2\cdot4+c=-13\ \Rightarrow\ \boldsymbol{c=3}\\ \Rightarrow\ \boldsymbol{b=4}\\ \Rightarrow\ a+4=2\ \Rightarrow \boldsymbol{a=-2}\end{array}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{y=-2x^2+4x+3}$

$\sum$ **Gesamt** **/ 37**