I. Halbjahr, 2. Schulaufgabe aus der Mathematik: Lösung

Datum:	2020-01-23	**Zeit:**	65 min.
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung, Taschenrechner	**Klasse:**	BWV

BE

1.0 Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge L folgender Gleichungen in der Variablen $x \in \mathbb{R}$: / 8

1.1 $2x^2 = 2^2$ **1.2** $x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ **1.3** $-3x + 2 - x^2 + x = 3$ **1.4** $(x-3)^2 = 4$

Lösung:

1.1 $2x^2 = 2^2 \overset{|:2}{\Leftrightarrow} x^2 = 2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \boldsymbol{L = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}}$

1.2 $x^2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \lor x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{L = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}}$

1.3 $-3x + 2 - x^2 + x = 3 \overset{|+x^2 \; |+2x \; |-2}{\Leftrightarrow} x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow \boldsymbol{L = \{-1\}}$

1.4 $(x-3)^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} - 3 = \pm\sqrt{4} \overset{|+3}{\Rightarrow} x_{1/2} - 3 = 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 5,\; x_2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{L = \{1; 5\}}$

---

2 Machen Sie den Nenner rational und vereinfachen Sie soweit wie möglich: $\frac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}$, mit $a \in \mathbb{Q}_0^+ \setminus \{3; 9\}$ / 2

Lösung: $\frac{\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot (3-\sqrt{a})}{(3+\sqrt{a})(3-\sqrt{a})} = \boldsymbol{\frac{3 \cdot \sqrt{a} - a}{9 - a}}$

---

3 Wo steckt in folgender Rechnung der Fehler? Begründen Sie Ihre Antwort. / 2

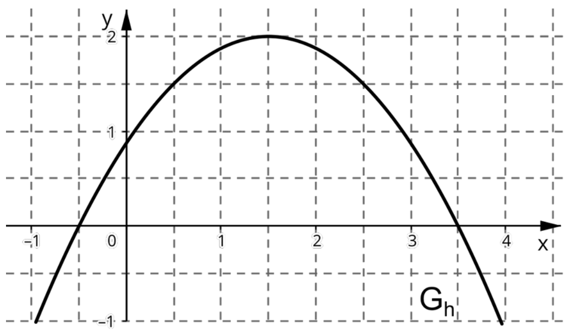
$$\mathbf{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3^1 = 3^{2 \cdot 0{,}5} = \underbrace{\left(3^2\right)}_{=9}^{0{,}5} = \underbrace{\left((-3)^2\right)}_{=9}^{0{,}5} = (-3)^{2 \cdot 0{,}5} = (-3)^1 = \mathbf{-3}$$

Lösung:
Da die Rechenregel $\left(x^n\right)^k = x^{n \cdot k}$ nur für $x \in \mathbb{R}_0^+$ gültig ist, ist der Fehler an der Stelle $\left((-3)^2\right)^{0{,}5} = (-3)^{2 \cdot 0{,}5}$ zu finden.

---

4 Nebenstehende Graphik zeigt den Graph einer quadratischen Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. / 3

Bestimmen Sie nachvollziehbar den zugehörigen Funktionsterm $h(x)$.



Lösung:
Ablesen ergibt: Scheitelpunkt $S(1{,}5; 2)$ sowie die Nullstellen $x_1 = -0{,}5$ und $x_2 = 3{,}5$.

Ansatz 1: $y = h(x) = a(x-1{,}5)^2 + 2$

Einsetzen von z.B. $N(-0{,}5; 0)$: $0 = a(-0{,}5-1{,}5)^2 + 2 = a \cdot 4 + 2 \overset{|-2 \; |:(4)}{\Rightarrow} a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boldsymbol{h(x) = -\frac{1}{2}(x-1{,}5)^2 + 2}$

Ansatz 2: $y = h(x) = a\cdot(x-x_1)(x-x_2) = a\cdot(x+0{,}5)(x-3{,}5)$

Einsetzen von $S(1{,}5\,;\,2)$: $2 = a\cdot(1{,}5+0{,}5)(1{,}5-3{,}5) = a\cdot 2\cdot(-2) = -4a \overset{|-4}{\Rightarrow} a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{h(x) = -\frac{1}{2}(x+0{,}5)(x-3{,}5)}$

5.0 Gegeben ist die quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

Der Graph von f wird mit F bezeichnet.

5.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie die Linearfaktorzerlegung von $f(x)$ an. / 4

Lösung:

$\boldsymbol{f(x)} = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3) \overset{Vieta!}{=} \boldsymbol{\frac{1}{2}(x-3)(x+1)}$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{x = 3 \ \vee\ x = -1}$ sind die Nullstellen.

5.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S der Parabel F und geben Sie den Funktionsterm $f(x)$ in Scheitelpunktform an. / 3

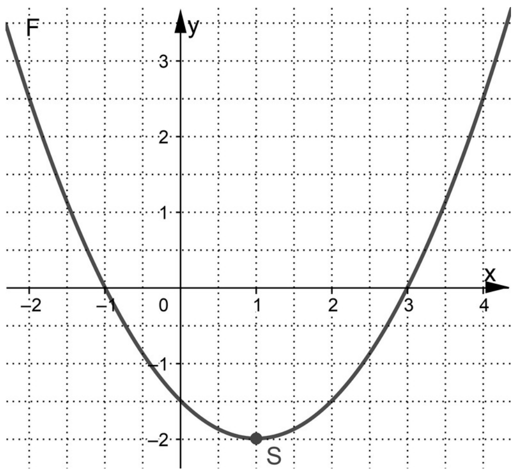
Lösung:

$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2\cdot\frac{1}{2}} = 1 \ \Rightarrow\ y_s = \frac{1}{2}(1-3)(1+1) = -2$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $S(1\,;\,-2)$ und $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2}$

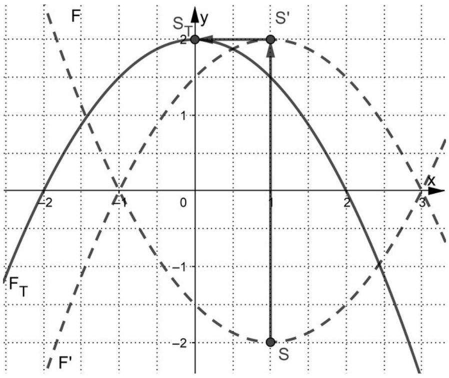
5.3 Zeichnen Sie F für $-2 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1\,\mathrm{LE} = 1\,cm$. / 3

Lösung:



5.4 Durch spiegeln von F an der x-Achse und verschieben um eins nach links entsteht der Graph F_T der Funktion $f_T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geben Sie $f_T(x)$ an und begründen Sie kurz Ihre Antwort (z.B. mit Hilfe einer aussagekräftigen Skizze). / 3

Lösung:
Spiegeln an der x-Achse: Parabel nun nach unten geöffnet, Scheitel bei $S'(1;2)$. Verschieben nach links um eins: Scheitel nun bei $S_T(0;2)$. Da Betrag des Leitkoeffizients gleich bleibt ist $\boldsymbol{f_T(x) = -\frac{1}{2}x^2+2}$.



Oder so: Spiegeln an der x-Achse ändert die Nullstellen nicht, nur der Leitkoeffizient ändert das Vorzeichen. Verschieben um eins nach links verschiebt auch die NST.

Somit: $\boldsymbol{f_T(x)} = -\frac{1}{2}(x-3+1)(x+1+1) \boldsymbol{= -\frac{1}{2}(x-2)(x+2)}$.

5.5 Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ für die die durch $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x}{4} - 2$ gegebene Gerade G unterhalb der Parabel F liegt. / 7

Lösung:
G unterhalb F: $g(x)<f(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)>0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} - \left(\frac{x}{4}-2\right) > 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}}_{=:k(x)} > 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$\Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$ je einfache NST von k mVzw. TW $x=0$: $k(0) = 0{,}5>0$

VZT

	TW	mVzw		mVzW	
x	0	0,5		2	
k(x)	+ + +	0	– – –	0	+ + +

$\Rightarrow G$ unterhalb F für $\boldsymbol{x \in \left]0{,}5\,;\,2\right[}$

$\sum$ / 35