# I. Halbjahr, 1. Schulaufgabe aus der Mathematik: Lösungsvorschlag

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Datum:** | 2019-11-28 | **Zeit:** | 65 min. |
| **Zugelassene Hilfsmittel:** | Formelsammlung, Taschenrechner | **Klasse:** | BWV |

BE

**1.0** **1.1** Berechnen Sie für $x \coloneqq -2$ den Term: $x^4 = (-2)^4 = \mathbf{16}$ / 2

**1.2** Schreiben Sie folgende Zahl in der Form $b^n$ mit $n \neq 1$ : $\frac{1}{4} = \mathbf{4^{-1} = 2^{-2}}$

**2** Untenstehende Formeln/Aussagen sind entweder korrekt, oder enthalten jeweils einen kleinen formalen / inhaltlichen Fehler. / 5
Kreuzen Sie jeweils an, ob die Angabe korrekt / fehlerhaft ist und falls fehlerhaft, schreiben Sie im rechten Feld die entsprechende Stelle korrigiert hin.

*Bewertung: je Aufgabe:* 0 BE, falls nicht bearbeitet.
1 BE, falls richtig beantwortet,
bei „Nein", aber nur mit richtiger Korrektur!
-1 BE in allen anderen Fällen.

*Insgesamt:* nicht weniger als 0 BE.

| Angabe | Korrekt | | Korrektur |
|---|---|---|---|
| | Ja | Nein | |
| $\frac{1}{3} = 0{,}3333333333$ | ☐ | ☒ | $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$ |
| Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to 2x-1$ | ☐ | ☒ | $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x-1$ |
| $2 \cdot -3 = -6$ | ☐ | ☒ | $2 \cdot (-3) = -6$ |
| Zwei nicht parallele Geraden $G$ und $H$ schneiden sich in einem Punkt $S = G \cap H$ | ☐ | ☒ | $\{S\} = G \cap H$ |
| Eine Funktion ist auch gleichzeitig eine Relation | ☒ | ☐ | *Relation:* „Beliebig vielen Elementen aus der Definitionsmenge können beliebig viele Elemente aus dem Bildbereich zugeordnet werden" *Funktion:* „Jedem Element aus der Definitionsmenge wird genau ein Element aus dem Bildbereich zugeordnet" |

**3** Geben Sie die Menge $P(\{a; b\})$ aller Teilmengen von $\{a; b\}$ in aufzählender Schreibweise an: / 2

$P(\{a; b\}) = \{\,\{\}, \{\mathbf{a}\}, \{\mathbf{b}\}, \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}\,\}$

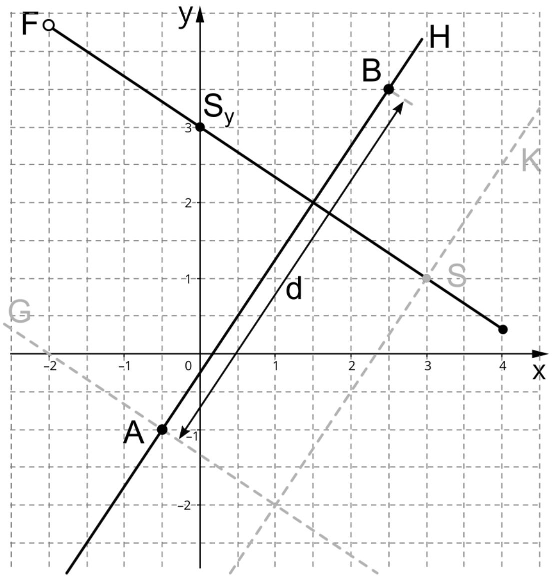
**▼▼ Weiter auf der Rückseite! ▼▼**

**4.0** Gegeben ist die Funktion $f:\,]-2;\,4]\to\mathbb{R},\; x\mapsto -\frac{2}{3}x+3$.
Der Graph von $f$ werde mit $F$ bezeichnet.

---

**4.1** Zeichnen Sie $F$ in ein kartesisches Koordinatensystem. / 3
Maßstab auf beiden Achsen: $1\,LE = 1\,cm$.

**Lösung:**




---

**4.2** Ermitteln Sie die Schnittpunkte $S_x$ und $S_y$ von $F$ mit den Koordinatenachsen. / 3

**Lösung:**
Schnittpunkt mit $y$-Achse: $S_y(0, f(0)) = \boldsymbol{S_y(0,3)}$
Schnittpunkt mit $x$-Achse:

$$f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{2}{3}x+3 \overset{|\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; x-4{,}5 \overset{|+4{,}5}{=} 0 \;\Leftrightarrow\; x=4{,}5 \notin\, ]-2;\,4] \text{ (!!!)}$$

Somit existiert kein Schnittpunkt mit der $x$-Achse.

---

**4.3** Der Graph $G$ der linearen Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist parallel zu $F$ und verläuft durch den Punkt $A(-0{,}5\,|\,-1)$. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm $g(x)$ an. / 2

**Lösung:** $\boldsymbol{g(x) = -\frac{2}{3}(x+0{,}5)-1} = -\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}-1 = \boldsymbol{-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3} = -0{,}\overline{6}x-1{,}\overline{3}}$

---

**4.4** Bestimmen Sie einen Funktionsterm $h(x)$ der linearen Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, deren Graph $H$ durch den Punkt $B(2{,}5\,|\,3{,}5)$ verläuft und senkrecht auf $F$ steht. / 4
Zeichnen Sie $H$ in das Koordinatensystem aus **4.1**.

**Lösung:**

$$H\perp F \;\Leftrightarrow\; m_f\cdot m_g=-1 \overset{m_f\neq 0}{\Leftrightarrow} m_g=-\frac{1}{m_f}=-\frac{1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{h(x)=1{,}5(x-2{,}5)+3{,}5} = 1{,}5x-3{,}75+3{,}5 = \boldsymbol{1{,}5x-0{,}25}$$

---

**4.5** Berechnen Sie den Abstand $d$ der Punkte $A$ und $B$ aus den Aufgaben **4.3** und **4.4** auf $2$ Stellen nach dem Komma. / 3

**Lösung:** $\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{(-0{,}5-2{,}5)^2+(-1-3{,}5)^2} = \sqrt{29{,}25} \approx \boldsymbol{5{,}41}$

**4.6** Berechnen Sie den Schnittpunkt $S$ von $F$ und dem Graphen $K$ der Funktion $k: 2y - 3x = -7,\ x, y \in \mathbb{R}$ . / 3

**Lösung:**

$F \cap K$: $y = f(x)$ in $k$:

$$2 \cdot \underbrace{\left(-\frac{2}{3}x + 3\right)}_{=\, y \,=\, f(x)} - 3x = -7 \;\Leftrightarrow\; -\frac{4}{3}x + 6 - 3x = -7 \;\overset{|\cdot 3}{\Leftrightarrow}\; \Leftrightarrow\; -4x + 18 - 9x = -21$$

$$\Leftrightarrow\; -13x + 18 = -21 \;\overset{|+21\ |+13x}{\Leftrightarrow}\; \Leftrightarrow\; 13x = 39 \;\overset{|:13}{\Leftrightarrow}\; \boldsymbol{x = 3 =: x_s}$$

Alternativ: $2y - 3x = -7 \;\overset{|+3x}{\Leftrightarrow}\; 2y = 3x - 7 \;\overset{|:2x}{\Leftrightarrow}\; y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = 1{,}5x - 3{,}5 = k(x)$

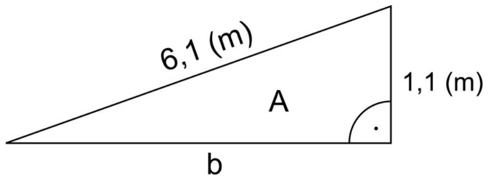
$$F \cap K:\ f(x) = k(x) \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + 3 = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \;\overset{|\cdot 6}{\Leftrightarrow}\; -4x + 18 = 9x - 21 \;\overset{|+4x\ |+21}{\Leftrightarrow}\; 13x = 39 \;\overset{|:13}{\Leftrightarrow}\; \boldsymbol{x = 3 =: x_s}$$

Somit: $\boldsymbol{y_s} = f(x_s) = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 3 = \boldsymbol{1} \;\Rightarrow$ Schnittpunkt $\boldsymbol{S(3;\,1)}$

---

**5** Aus einem Blech wie in nebenstehender - nicht maßstabsgerechter - Skizze soll eine Kräuterspirale gebogen werden. / 2

Berechnen Sie den Flächeninhalt $A$ (in $m^2$) (zum Bestimmen der Kosten).




**Lösung:** $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot 1{,}1 = \frac{1}{2} \overset{Pythagoras}{=} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6{,}1^2 - 1{,}1^2} \cdot 1{,}1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1{,}1 \boldsymbol{= 3{,}3}\,(m^2)$

---

**6.0** Von *29* Schülern (Grundmenge $\Omega$) einer Vorklasse sind heute *17* mit dem Bus ($B$) und *12* mit dem Zug ($Z$) zur Schule gefahren. *9* Schüler nutzen dabei beides: Zug und Bus. / 5

**Lösung:**

| | $Z$ | $\overline{Z}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | *9* | **8** | *17* |
| $\overline{B}$ | **3** | **9** | **12** |
| | *12* | **17** | *29* |

---

**6.1** Wie viele Schüler sind nur mit dem Bus gefahren?
Schreiben Sie diese Menge als Verknüpfung der Mengen $B$, $Z$ und/oder $\Omega$.

**Lösung:**

Nur mit dem Bus: $\boldsymbol{E_1 = B \setminus Z = B \cap \overline{Z}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{|E_1| = 8}$

---

**6.2** Wie viele Schüler sind weder mit dem Bus noch mit dem Zug zur Schule gekommen?
Schreiben Sie auch diese Menge als Verknüpfung der Mengen $B$, $Z$ und/oder $\Omega$.

**Lösung:** Weder mit dem Bus noch mit dem Zug:
$\boldsymbol{E_2 = \overline{B} \cap \overline{Z} = \overline{B \cup Z} = \Omega \setminus (B \cup Z)} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{|E_2| = 9}$

---

$\sum$ / 34