1 Wurzeln

Die n-te Wurzel

Für $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die n-te Wurzel aus a die nicht negative Lösung der Gleichung $x^n = a$ mit $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Geschrieben: $\sqrt[n]{a}$

Die nicht negative reelle Zahl a heißt Radikand, die natürliche Zahl n heißt Wurzelexponent.

Für $n=2$ wird sie als Quadratwurzel bezeichnet und schreibt einfach $\sqrt{a}$.

Die Gleichung $x^2 = a$ hat neben $\sqrt{a}$ auch noch die Lösung $-\sqrt{a}$, denn $(-\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}^{\,2} = a$.

Dies sind die einzigen, denn $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = x^2 - a = 0$

Somit gilt: $x^2 = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{a} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Für positive Zahlen a und b gelten die folgenden Rechengesetze:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

Bei negativen Zahlen können diese Rechengesetze nur angewendet werden, wenn m und n ebenfalls ungerade Zahlen sind. Bei anderen komplexen Zahlen sind sie gänzlich zu vermeiden.

Beispiele

a) $x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27}$

b) $x^3 = -64 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{64} = -4$

c) $x^4 = \dfrac{16}{625} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}} = \pm\dfrac{2}{5}$

d) $x^5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[5]{0} = 0$

Seien $a>0$ und $x_0>0$ reelle Zahlen, dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch die Vorschrift $x_{n+1}:=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ gegeben ist, gegen $\sqrt{a}$. (Newtonverfahren, schon von den Babyloniern verwendet).

Allgemeiner lässt sich $\sqrt[m]{a}$ wie folgt berechnen:

$x_{n+1}:=x_n-\frac{x_n^m-a}{mx_n^{m-1}}$ (Newtonverfahren)

Bemerkungen $\exp(z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{n!}$, $a^z:=\exp(z\cdot\ln(a));a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{infinity}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$, $x\in\mathbb{C}$, $|x|<1$

$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}$

$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1}$, n ungerade

$\frac{x^n+y^n}{x-y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}-y^{n-1}$, n gerade

Anordnung von Zahlenfolgen

Es sind gewisse Zahlen als positive ausgezeichnet (Schreibweise $x>0$), so dass folgende Anordnungsaxiome erfüllt sin:

1. Für jedes $x\in\mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen:
   $x>0$, $x=0$; $-x>0$
2. Sind $x>0$ und $y>0$, so folgt, $x+y>0$
3. Sind $x>0$ und $y>0$, so folgt, $x,y>0$

Definition

Man setzt $x>y$, falls $x-y>0$ gilt.

$x\geq y$ Bedeutet $x>y$ oder $x=y$

Statt $x>y$ (bzw. $x\geq y$) schreibt man auch $y<x$ (bzw. $y\leq x$)

Folgerung: $x<0 \Leftrightarrow -x>0$

Beweis: $x<0$ heißt nach Definition $0>x$ und dies ist nach definition gleichbedeutend mit $0-x>0$, d.h.$-x>0$.

Es gelten folgende Regeln für $x,y,z,a,x',x'\in\mathbb{R}$:

a) $x<y\wedge y<z \Rightarrow x<z$ (transitiv)
b) $x<y\wedge x'<y' \Rightarrow x+x'<y+y'$
c) $x<y\wedge a>0 \Rightarrow ax<ay$
   $x<y\wedge a<0 \Rightarrow ax>ay$

Es genügt zu zeigen, dass $]0,1[$ nicht abzählbar ist.

Angenommen $]0,1[$ abzählbar. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen, so dass $]0,1[=\{x_n|n\geq 1\}$. Die Dezimalbruchentwicklungen der Zahlen x_n seien

$x_1 = 0{,}a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots$
$x_2 = 0{,}a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots$
$x_3 = 0{,}a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots$
$\ldots$

Wir definieren nun eine Zahl $c \in]0{,}1[$ durch die Dezimalbruchentwicklung $c = 0{,}c_1\, c_2\, c_3 \ldots$, wobei

$c_k := \begin{cases} 5, \, falls \, a_{kk} \neq 5 \\ 4, \, falls \, a_{kk} = 5 \end{cases}$

Insbesondere gilt $c_k \neq a_{kk}$ für alle$k \geq 1$. Nach Annahme existiert ein $n \geq 1$ mit $x_n = c$. Daraus folgt aber $a_{nn} = c_n$, was im Widerspruch zur Konstruktion von c steht.

$\sqrt{2}$ Ist nicht rational:

Vorbemerkung:
Ist das Quadrat einer Zahl gerade, dann waren es auch die die Zahl selbst:
Beweis: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer ungerade, denn
$(2n+1)(2k+1) = 4nk + 2(n+k) + 1 = \underbrace{\underbrace{2(2nk+n+k)}_{gerade}+1}_{ungerade}$

Beweis:

Angenommen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und p, q teilerfremd.

$\Rightarrow \quad \frac{p^2}{q^2} = \sqrt{2}^2 = 2$

$\Rightarrow \quad p^2 = 2q^2$, also muss, weil $2q^2$ immer eine gerade Zahl ist, auch p^2 gerade, somit auch p (siehe Vorbemerkung). Ist aber p^2 gerade dann lässt sich p^2 mit $(2r)^2$ darstellen, nach Einsetzen folgt: $2b^2 = 4r^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2r^2 \quad \Rightarrow$ dann ist auch q immer eine gerade Zahl (gleiches Argument wie für p).
Sind nun p und q jeweils gerade Zahlen, dann sind sie nicht mehr teilferfremd, da sie durch 2 gekürzt werden können. Dies ist aber ein Widerspruch zu der Annahme oben; deshalb kann $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl sein.