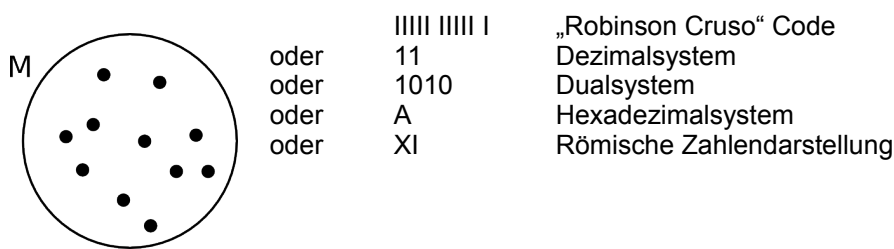




## 2 Aufbau des Zahlensystems

### 2.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Das Abzählen von Mengen ist eine uralte menschliche Betätigung und so hat der berühmte Ausspruch Kroneckers (1823-1892) „*Die Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk*“, auch einen wahren Kern. So lassen sich die positiven ganzen Zahlen als Kardinalzahlen von endlichen Mengen auffassen und die Addition in  $\mathbb{N}$  durch als Abzählen der Vereinigung disjunkter Mengen, die Subtraktion als Abzählen des Komplements einer Menge in einer Grundmenge.

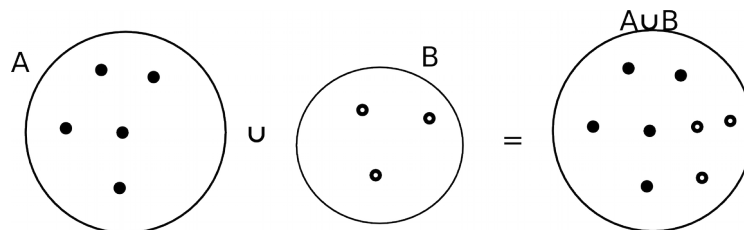


Darstellung mit Tachometer (Kilometeranzeige, Dualkilometeranzeige mal basteln oder Programmieren!)

Addition (Vereinigung disjunkter Mengen)

Abzählen der Vereinigung zweier disjunkter Mengen mit entsprechenden Kardinalzahlen

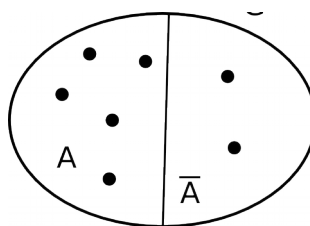
Beispiel: Seien A und B disjunkte Mengen mit  $|A| = 5$  und B mit  $|B|$ ; dann ist  $|A \cup B| = 8$ .



Subtraktion (Komplementbildung)

Abzählen des Komplements einer Menge in einer gegebenen Grundmenge mit entsprechender Kardinalzahl.

Beispiel: G gegeben mit  $|G| = 7$  und  $A \subseteq G$  mit  $|A| = 5$ ; dann ist  $|\bar{A}| = 2$



Das Zeichen für die natürlichen Zahlen ist  $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

z.B. aus der Mengenlehre als endliche Kardinalzahlen definiert und mit den Peano-Axiomen charakterisiert (Peano: 1889):

1. 0 ist natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl als „Nachfolger“.
3. 0 ist kein Nachfolger.
4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger
5. (Induktionsaxiom) ist  $M$  eine Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , die die 0 und mit jedem Element seinen Nachfolger enthält, so gilt  $M = \mathbb{N}$ .



### 2.1.1 Wichtige Mengen

- Potenzmenge  $P(M)$  ( $|P(M)|=2^{|M|}$ ), Verknüpfungen z.B.:  $\cup, \cap$ .
- Menge der Pfeile auf einer Linie (Vektoren): Verknüpfung Aneinanderlegen von Pfeilen
- {Gerade Zahlen, Ungerade Zahlen}; Verknüpfung: Zwei Vertreter addieren/multiplizieren und wieder einer der beiden Mengen zuordnen.

## 2.2 Verknüpfungen

**Motivation:** Mengen sind bis jetzt unstrukturierte „Haufen“ von irgendwelchen Objekten. Die Mathematik beschäftigt sich nun unter anderem damit, diesem „Haufen“ eine „sinnvolle“ Struktur zu geben. Eine der grundlegenden „sinnvollen“ Forderung ist die: dass, wenn zwei beliebigen Elementen aus einer Menge auf irgendeine Weise ein drittes Element zugeordnet wird, dieses wieder in der ursprünglichen Menge liegen soll.

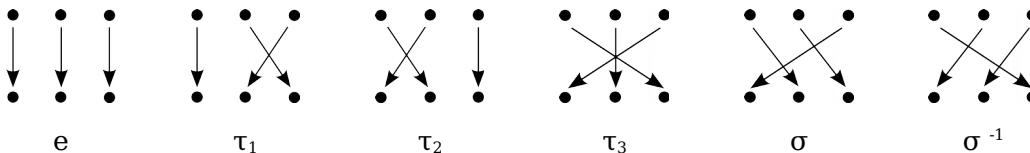
### 2.2.1 Definition

Unter einer **Verknüpfung** versteht man eine Vorschrift, die zwei Elementen  $a$  und  $b$  eindeutig ein drittes Element  $c$  zuordnet. Man schreibt dafür  $a * b = c$  und liest: „ $a$  verknüpft mit  $b$  gibt  $c$ “.

#### Beispiele

- $a * b := a + b$ ; zwei Zahlen wird ihre Summe zugeordnet.
- $a * b := a \cdot b$ ; zwei Zahlen wird ihr Produkt zugeordnet.
- $A * B := A \cup B$ ; zwei Teilmengen einer Menge wird ihre Vereinigungsmenge zugeordnet.
- $A * B := A \cap B$ ; zwei Teilmengen einer Menge wird ihre Schnittmenge zugeordnet.
- $\sigma_1 * \sigma_2 := \sigma_1 \cdot \sigma_2$ ; Hintereinanderausführung von Vertauschungen
- $\vec{a} * \vec{b} := \vec{a} + \vec{b}$ ; Aneinanderlegen von Pfeilen

Vertauschungen  $S_n$  ( $|S_n|=n!$ ); Verknüpfung: Hintereinanderausführung:



Aufgabe: Erstelle Verknüpfungstabelle der  $S_3$

Verknüpfungstabelle  $S_3$  (Permutationen)

	e	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma^{-1}$
e	e	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma^{-1}$
$\tau_1$	$\tau_1$	e	$\sigma$	$\sigma^{-1}$	$\tau_2$	$\tau_3$
$\tau_2$	$\tau_2$	$\sigma^{-1}$	e	$\sigma$	$\tau_3$	$\tau_1$
$\tau_3$	$\tau_3$	$\sigma$	$\sigma^{-1}$	e	$\tau_1$	$\tau_2$
$\sigma$	$\sigma$	$\tau_3$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\sigma^{-1}$	e
$\sigma^{-1}$	$\sigma^{-1}$	$\tau_2$	$\tau_3$	$\tau_1$	e	$\sigma$



## 2.2.2 Abgeschlossenheit

### 2.2.2.1 Definition

Ist für beliebige  $a$  und  $b$  einer Menge  $M$  auch  $a * b = c$  aus  $M$ , so spricht man von einer (inneren) Verknüpfung auf der Menge  $M$ . Man sagt auch, die Menge  $M$  ist **abgeschlossen** bezüglich der Verknüpfung  $*$ .

#### Beispiele

- $\mathbb{N}$  ist abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung  $a * b := a + b$  (Summe).
- $\mathbb{N}$  ist nicht abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung  $a * b := \frac{a+b}{2}$  (arithmetisches Mittel).
- $\mathbb{N}$  ist nicht abgeschlossen bezüglich der Verknüpfung  $a * b := a - b$  (Differenz).

Es folgen weitere „sinnvolle“ Bedingungen.

## 2.2.3 Assoziativgesetz

### Definition

Eine Verknüpfung  $*$  auf einer Menge  $M$  heißt **assoziativ**, falls für alle  $a, b, c \in M$  gilt:  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .

#### Beispiele

- Die Verknüpfungen „+“ (Summe), „·“ (Produkt), „ $\cup$ “ sind assoziativ.
- Die Verknüpfung „-“ (Differenz) ist nicht assoziativ, denn  $4 = 5 - (3 - 2) \neq (5 - 3) - 2 = 0$ .

Zeige:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$  und  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$

## 2.2.4 Neutrales Element

### Definition

Sei  $M$  eine Menge mit einer Verknüpfung  $*$ . Ein Element  $e \in M$  heißt ein **neutrales Element** bezüglich der Verknüpfung  $*$ , wenn für alle  $a \in M$  gilt:  $e * a = a * e = a$ .

#### Beispiele

- 0 ist neutrales Element bezüglich der Verknüpfungen „+“ (Summe).
- 1 ist neutrales Element bezüglich der Verknüpfung „·“ (Produkt).
- $\emptyset$  ist neutrales Element bezüglich der Verknüpfung „ $\cup$ “ auf  $P(M)$ .
- $M$  ist neutrales Element bezüglich der Verknüpfung „ $\cap$ “ auf  $P(M)$ .

## 2.2.5 Inverses Element

### Definition

Sei  $*$  eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge  $M$  mit dem neutralen Element  $e$  und  $a$  ein Element von  $M$ . Ein Element  $a' \in M$  heißt ein zu  $a$  **inverses Element**, wenn  $a * a' = a' * a = e$  gilt.  $a$  heißt **invertierbar** in  $M$ , wenn es ein zu  $a$  inverses Element in  $M$  gibt.

**Hinweis:** Bei multiplikativer Schreibweise wird  $a'$  meist mit  $a^{-1}$  bezeichnet. Bei additiver Schreibweise mit  $-a$  (das **Negative** von  $a$ ). Für  $b + (-a)$  schreibt man meist kurz  $b - a$  (Differenz)



## Beispiele

- $a^{-1} =: a^{-1} =: \frac{1}{a}$  ist Inverses zu  $a$  in  $\mathbb{R}$  bezüglich der „normalen“ Multiplikation.
- $-a =: a^{-1}$  ist Inverses zu  $a$  in  $\mathbb{Z}$  bezüglich der „normalen“ Addition.
- $S_3 \dots$

Es gilt:

1.  $e$  ist invertierbar, und es ist  $e^{-1} = e$
2. Ist  $a \in M$  invertierbar, so ist auch  $a^{-1}$  invertierbar und es ist:  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
3. Sind  $a_1, \dots, a_n \in M$  invertierbar, so ist auch  $(a_1 \cdots a_n)$  invertierbar und es gilt:  $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$
4. Speziell ist mit zwei Elementen  $a, b \in M$  auch das Produkt  $ab$  invertierbar und es ist  $(ab)^{-1} = b^{-1} a^{-1}$

Frage: gibt es Inverses zu  $A \subseteq M$  in  $P(M)$  bezüglich  $\cup$  und  $\cap$  ?

Aufgabe: Zeige, dass gilt:  $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  (Symmetrische Differenz) und stelle fest, ob es ein Inverses zu  $A \subseteq M$  in  $P(M)$  gibt. Wenn ja, welches, wenn nein, warum nicht?

## 2.2.6 Kommutativität

### Definition

Eine Verknüpfung  $*$  auf einer Menge  $M$  heißt **kommutativ**, wenn für alle  $a, b, c \in M$  gilt:  $a * b = b * a$

### Beispiele

- $\mathbb{N}$  ist bezüglich der Verknüpfung  $a * b = a + b$  (Summe) kommutativ.
- $\mathbb{Z}$  ist bezüglich der Verknüpfung  $a * b = a - b$  (Differenz) nicht kommutativ, denn  $5 - 3 \neq 3 - 5$ .
- $S_3$  (Menge der Vertauschungen mit drei Elementen) ist bezüglich der Hintereinanderausführung nicht kommutativ.

Sei  $M$  eine Halbgruppe (Menge mit assoziativer Verknüpfung),  $a \in M$  und  $n \in \mathbb{N}_+$ . Das  $n$ -fache Produkt von  $a$  mit sich selbst heißt die  $n$ -te Potenz von  $a$ , sie wird mit  $a^n$  bezeichnet. Besitzt  $M$  ein neutrales Element  $e$ , so setzt man  $a^0 := e$ . Ist darüber hinaus  $a$  invertierbar, so wird  $a^n$  für  $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ , durch  $a^n := (a^{-1})^{-n}$  definiert. Nach 2.2.5. (1) ist dies dasselbe wie  $(a^{-n})^{-1}$ .

Es gelten folgende Rechenregeln:

## 2.2.7 Rechenregeln für Potenzen

Sei  $M$  eine Menge assoziativer Verknüpfung und neutralem Element. Ferner seien  $a$  und  $b$  invertierbare kommutierende Elemente in  $M$ . Dann gilt für alle  $m, n \in \mathbb{Z}$  folgendes:

1.  $a^m a^n = a^{m+n}$
2.  $(a^m)^n = a^{mn}$
3.  $a^m b^n = b^n a^m$
4.  $(ab)^m = a^m b^m$

Bemerkung: was kann an Voraussetzungen noch weggelassen werden?

$a$  und  $b$  nicht invertierbar, dann gelten Regeln für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ , fällt auch noch das neutrale Element weg, dann immer noch für  $m, n \in \mathbb{N}_+$



Wird die Verknüpfung auf  $M$  additiv geschrieben, so wird die  $n$ -te Potenz von  $a \in M$  als  $n$ -faches  $na$  von  $a$  bezeichnet (die ganzzahligen Vielfachen von  $a$ ).

Die Regeln von 2.2.7 lauten dann folgendermaßen:

1.  $ma + na = (m+n)a$
2.  $n(ma) = (mn)a = (nm)a$
3.  $ma + nb = nb + ma$
4.  $m(a+b) = ma + mb$

## 2.2.8 Distributivgesetz

### Definition

Zwei Verknüpfungen  $*$  (Multiplikation) und  $\Delta$  (Addition) auf einer Menge  $M$  erfüllen die **distributiven Gesetze**, wenn für alle  $a, b, c \in M$  gilt:  $a*(b\Delta c) = (a*b)\Delta(a*c)$  und  $(b\Delta c)*a = (b*a)\Delta(c*a)$ .

**Anmerkung:**  $*$  und  $\Delta$  werden meistens mit  $\cdot$  und  $+$  bezeichnet.

### Beispiele

- Die Verknüpfungen „ $\cap$ “ und „ $\cup$ “ erfüllen die distributiven Gesetze in  $P(M)$
- Die Bildung der Schnittmenge als Multiplikation und die symmetrische Differenz als Addition erfüllen die Distributivgesetze in  $P(M)$
- Die „normale“ Multiplikation und Addition auf  $\mathbb{R}$  erfüllen die distributiven Gesetze.

Bezüglich „normalen“ Multiplikation und Addition in  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  gelten folgende Rechenregeln:

1.  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ .
2.  $a(-b) = (-a)b = -ab$
3.  $(-a)(-b) = ab$
4.  $(m+n)a = ma + na$