1. Mengen

1.1 Der Mengenbegriff in der Mathematik

Motivation: Mengenbegriff von Cantor: “ eine Zusammenfassung von bestimmten, wohl unterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen”

Merkmale:

1. Eine Menge ist dann und nur dann festgelegt, wenn sich von allen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens angeben lässt, ob sie zur Menge gehört oder nicht.
2. Ein Objekt darf in der Menge nicht mehrfach als Element auftreten.

Zusammenfassung

M heißt eine Menge, wenn für jedes konkrete oder abstrakte Objekt x der Satz $x \in M$ (lies: x gehört zu M) eine wahre oder falsche Aussage ist. Die Negation des Satzes $x \in M$ schreiben wir $x \notin M$ (lies: x gehört nicht zu M)

Ist der Satz $x \in M$ ...

... für alle x falsch, so ist M eine leere Menge (meist geschrieben als $\emptyset$),
... für endlich viele x wahr, so ist x M eine endliche Menge
... für unendlich viele x wahr, so ist x M eine unendliche Menge

1.2 Angaben von Mengen

Bezeichnung mit großen lateinischen Buchstaben, für die Element meist kleine lateinische Buchstaben.

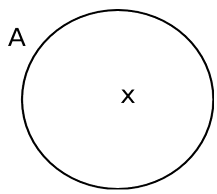
Aufzählende Form
Beispiele:

M = {1, 2, 3, ... }
N = {a, b, ..., z}
P = { 5 }

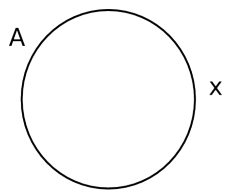
Beschreibende Form
Beispiele:
M = {x | x ist Pkw mit Amberger Kennzeichen}
P = {p | p ist Primzahl}
P = {s | s ist Schüler an der BOS-Amberg}

Venn Diagramm

Die Elemente der Menge werden als Punkte der Zeichenebene dargestellt, von einer beliebig geformten Kurve umrahmt.

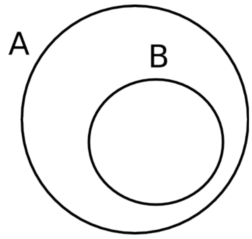


$x \in A$, x ist ein Element von A.



$x \notin A$, x ist nicht Element von A.

1.3 Teilmenge



Definition

*Sind alle Elemente der Menge B auch Elemente der Menge A, so heißt B eine **Teilmenge** von A, symbolisch: $B \subset A$.*
*B heißt **echte Teilmenge** von A, wenn $B \subset A$ ist und es in A mindestens ein Element gibt, das nicht zu B gehört.*
*B heißt **unechte Teilmenge** von A, wenn $B \subset A$ ist und es in A kein Element gibt, das nicht auch zu B gehört.*

Hinweise: Kann B eine echte **oder** eine unechte Teilmenge von A sein, so schreibt man $B \subseteq A$ (somit sind also die Schreibweisen $B \subseteq A$ und $B \subset A$ äquivalent. Um Verwirrungen vorzubeugen wird $\subset$ hier möglichst nicht verwendet.)
Ist B echte Teilmenge von A, so schreibt man $B \subsetneq A$ (Achtung: In manchen Büchern wird $B \subsetneq A$ als $B \subset A$ geschrieben!)
Ist B keine Teilmenge von A so schreibt man $B \not\subset A$ oder $B \nsubseteq A$.

Beispiele:
$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$
$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4\}$
$\{1, 2, 3\} \nsubseteq \{1, 2, 4\}$

1.4 Gleiche Mengen

Definition

*Zwei Mengen heißen **gleich**, wenn jedes Element von B auch Element von A ist und jedes Element von A auch Element von B ist, symbolisch: $A = B$*

1.5 Schnittmenge

Definition

*Die Menge aller Objekte, die sowohl zu A als auch zu B gehören, heißt **Schnittmenge** der Mengen A und B, symbolisch: $A \cap B$ (lies: A geschnitten mit B).*

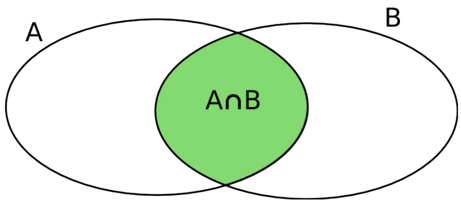


Abbildung 1: Schnittmenge

Äquivalent: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Zwei Mengen mit $A \cap B = \emptyset$ heißen **disjunkt** oder elementfremd.

Beispiele:
$\{2,1,3\} \cap \{1,5,2\} = \{1,2\}$
$\{x \mid x \text{ ist Primzahl}\} \cap \{-1,0,1,3\} = \{3\}$
$\{s,c,h,u,l,e\} \cap \{k,o,r,b\} = \emptyset$

1.6 Vereinigungsmenge

Definition

*Die Menge aller Objekte, die mindestens zu einer Menge A und B gehören, heißt **Vereinigungsmenge** der Mengen A und B, symbolisch: $A \cup B$ (lies: A vereinigt mit B).*

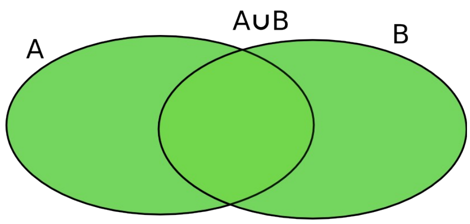


Abbildung 2: Vereinigungsmenge

Äquivalent: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Beispiele:

$\{2,1,3\}\cup\{1,5,2\}=\{1,2,3,5\}$

$\{x \mid x \text{ ist gerade ganze positive Zahl}\}\cup\{x \mid x \text{ ist ungerade ganze positive Zahl}\}=\mathbb{N}^{*}$

$\{s,c,h\}\cup\emptyset=\{s,c,h\}$

Aufgaben

1. Gegeben sind die Mengen $A:=\{3,4,8\}$, $B:=\{1,5\}$, $C:=\{4,5,7\}$
   Bestimmen Sie jeweils:
   $A\cap B$, $A\cup B$, $B\cup C$, $(A\cap B)\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $(A\cup C)\cap(B\cup C)$
2. Zeichen Sie jeweils für beide Mengen ein Ven-Diagramme und bestimmen Sie damit, ob die Mengen gleich oder verschieden sind:
   a) $A\cap(B\cup C)$ und $A\cup(B\cap C)$
   b) $A\cap(B\cup C)$ und $(A\cap B)\cup C$
   c) Distributivgesetz der Mengenlehre:
      i) $A\cup(B\cap C)$ und $(A\cup B)\cap(A\cup C)$
      ii) $A\cap(B\cup C)$ und $(A\cap B)\cup(A\cap C)$

1.7 Differenzmenge

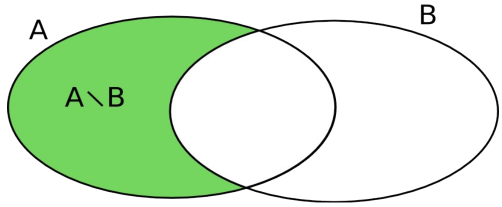


Abbildung 3: Differenzmenge

Definition
*Die Menge aller Objekte, die zu A gehören, ohne zugleich zu B zu gehören, heißt **Differenzmenge** oder **Restmenge** der Mengen A und B, symbolisch: $A\setminus B$ (lies: A ohne B).*

Äquivalent: $A\setminus B:=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$

Ist $B\subset A$, so heißt die Differenzmenge $A\subset B$ das **Komplement** von B in Aund man schreibt: $\complement_A B$ oder auch $\overline{B}$, falls die Grundmenge bekannt ist.

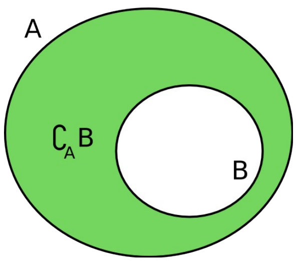


Abbildung 4: Komplement

Beispiele:

$\{2,1,3\}\setminus\{1,5,2\}=\{3\}$

$\{s,c,h\}\setminus\{c,h\}=\complement_{\{s,c,h\}}\{c,h\}=\{s\}$

$\complement_{\mathbb{N}}\{0\}=\mathbb{N}^{+}=\mathbb{N}^{*}$

1.8 Produktmenge

Definition
*Unter der **Produktmenge** (Kartesisches Produkt, Kreuzprodukt, Paarmenge) der Mengen A und B versteht man die Menge der sämtlichen geordneten Paare, die mit den Elementen der Menge A (an erster Stelle) und denen der Menge B (an zweiter Stelle) gebildet werden können, symbolisch $A\times B$ (lies: A Kreuz B)*

Äquivalent: $A\times B:=\{(x,y) \mid x\in A \wedge y\in B\}$

Anmerkungen: Symmetrische Differenz, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz anhand von Mengenbildern zeigen.

1.9 Potenzmenge

Definition

Ist M eine Menge, dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ definiert als $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$

Beispiel:

$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\{\},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

Es gilt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ (Zusammenhang mit Pascalschem Dreieck / Binominalkoeffizienten / Lotto)

1.10 Mächtigkeit von Mengen

Definition

*Ist M endlich, so wird die Anzahl der Elemente von M als **Mächtigkeit** oder **Ordinalzahl von M** bezeichnet.*

Symbolisch: $|M|$ (In manchen Büchern auch als $n(M)$).

Anmerkungen

- $|\mathbb{N}| =: \aleph_0$ ($\aleph$: alpeh (Häbräisch))
- Hilberthotel
- Andere Unendlichkeiten (Cantorsches Abzählverfahren)
  $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ (die alephs bilden übrigens keine Menge!)

1.11 Satz

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

denn:

$$\begin{aligned}
|A \cup B| &= |(A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B)| \\
&\underset{\substack{\text{paarweise}\\\text{disjunkt !}}}{=} |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\
&\underset{\text{Trick !}}{=} |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| + \underbrace{|A \cap B| - |A \cap B|}_{=0} \\
&\underset{\text{Umsortieren}}{=} \underbrace{|A \setminus B| + |A \cap B|}_{\substack{\text{Zerlegung von } A:\\ A = (A \setminus B) \dot{\cup} (A \cap B)}} + \underbrace{|B \setminus A| + |A \cap B|}_{\substack{\text{Zerlegung von } B:\\ B = (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B)}} - |A \cap B| \\
&= |A| + |B| - |A \cap B|
\end{aligned}$$

oder graphisch!

Aufgaben

1. Von 586 Schülern ein Schule kaufen 312 Broschüre A, 253 die Broschüre B, 197 keine.
   Wie viel Schüler kaufen Broschüre A und zugleich B, A oder B, nur A nur B, nicht A nicht B?
   (Lösung: $|A \cap B| = 176$, $|A \setminus B| = 136$, $|B \setminus A| = 77$)