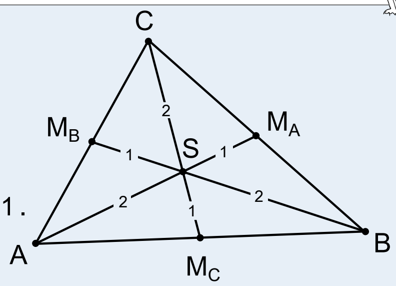
Schwerpunkt eines Dreiecks

Satz:

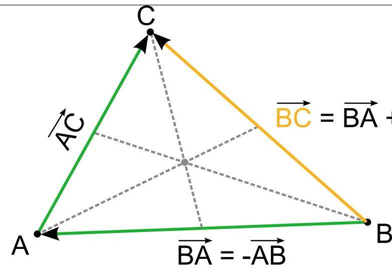
1) Die Seitenhalbierenden eines nicht ausgearteten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S.
2) Der Schwerpunkt teilt die Strecken $[AM_A]$, $[BM_B]$ und $[CM_C]$ jeweils im Verhältnis 2:1 .
3) Seine Koordinaten berechnen sich mit $\boxed{\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$.



Beweis:

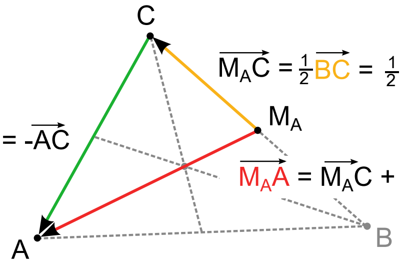
zu 2)

Es gilt:



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

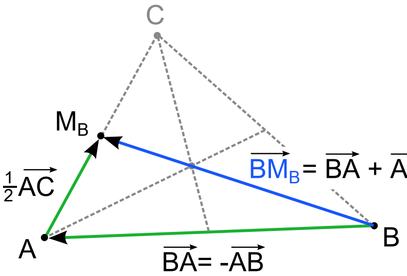
$\overrightarrow{M_AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$



$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{M_AA} = \overrightarrow{M_AC} + \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

① $\overrightarrow{M_AA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

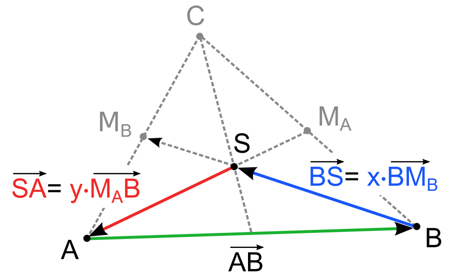


$\overrightarrow{AM_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BM_B} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

② $\overrightarrow{BM_B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{SA} = y\cdot\overrightarrow{M_AA}$ $\quad$ $\overrightarrow{BS} = x\cdot\overrightarrow{BM_B}$

Damit ist
$$\begin{aligned}
\vec{0} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA}\\
&= \overrightarrow{AB} + x\cdot\overrightarrow{BM_B} + y\cdot\overrightarrow{M_AA}\\
&= \overrightarrow{AB} + x\cdot(\underbrace{\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}}_{②}) + y\cdot(\underbrace{-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}}_{①})\\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}x\cdot\overrightarrow{AC} - x\cdot\overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{2}y\cdot\overrightarrow{AC} - \tfrac{1}{2}y\cdot\overrightarrow{AB}\\
&= \overrightarrow{AB}\cdot\underbrace{(1-x-\tfrac{1}{2}y)}_{=0} + \overrightarrow{AC}\cdot\underbrace{(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y)}_{=0}
\end{aligned}$$

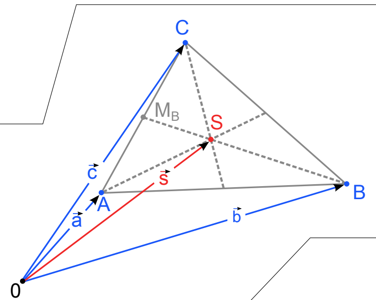
$\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind **linear unabhängig** (Dreieck ist nicht ausgeartet), also muss gelten:

$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow x = y \quad ③$$

und $$1-x-\tfrac{1}{2}y = 0 \overset{③}{\Leftrightarrow} 1-x-\tfrac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \tfrac{2}{3} \overset{③}{\Rightarrow} y = \tfrac{2}{3}}$$

zu 3)

$$\boxed{\vec{s}} = \vec{b} + \overrightarrow{BS} = \vec{b} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{BM_B} = \vec{b} + \tfrac{2}{3}(\vec{m}_B - \vec{b})$$
$$= \tfrac{1}{3}\vec{b} + \tfrac{2}{3}\cdot(\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})) = \boxed{\tfrac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}$$



zu 1)

Bleibt zu zeigen: $\vec{c} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CS} = \vec{m}_C = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$,
d.h. S liegt auf der Seitenhalbierenden CM_C und teilt $[CM_C]$ im Verhältnis 2:1.

$$\boxed{\vec{c} + \tfrac{3}{2}\overrightarrow{CS}} = \vec{c} + \tfrac{3}{2}(\vec{s}-\vec{c}) = \vec{c} + \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \vec{c})$$
$$= \vec{c} + \tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) - \tfrac{3}{2}\vec{c} = \boxed{\tfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$$

■