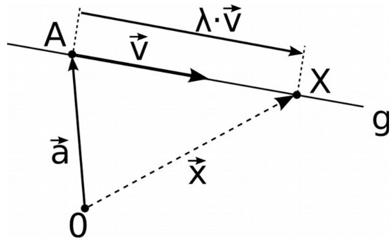
Geraden und Ebenen

1. Geraden



Punkt-Richtungs-Form:

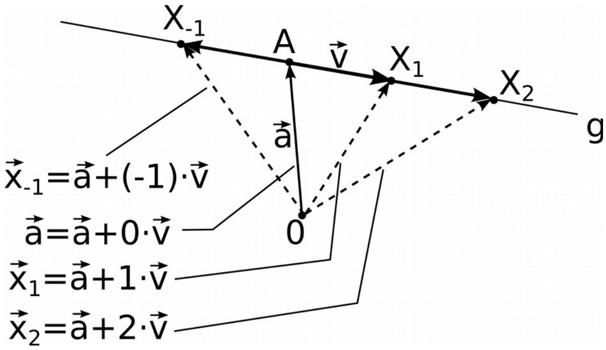
$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Die Punkte $X_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + \lambda v_1, a_2 + \lambda v_2, a_3 + \lambda v_3)$ bilden die Gerade g.

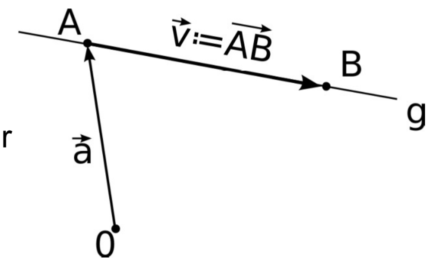
Bezeichnungen:

A Aufpunkt, $\vec{a}$ Stützvektor, $\vec{v}$ Richtungsvektor.

Beispiel für verschiedene λ:



Ist eine Gerade durch $g = AB$ gegeben,
so ist $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$.



Als Aufpunkt kann ein beliebiger Punkt auf der Geraden gewählt werden, z.B. auch B . Der Richtungsvektor muss nur in die Richtung der Geraden zeigen,
also ist $g: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \overrightarrow{BA}\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine gültige Darstellung von g .

Merke:

Die Punkt-Richtungsform legt **eindeutig** eine Gerade fest, **aber** eine Gerade besitzt **unendlich viele** Punkt-Richtungs-Formen.

Beispiele:

1. Zeigen Sie, dass die Punkte $B_\lambda(3\lambda; \lambda-4; -2),\ \lambda \in \mathbb{R}$ auf einer Geraden liegen.

Lösung: $$\begin{pmatrix} 3\lambda \\ \lambda-4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \lambda \cdot 3 \\ -4 + \lambda \cdot 1 \\ -2 + \lambda \cdot 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x} : g}_{\text{Gerade in Punkt-Richtungs-Form}}$$

2. Gegeben: Aufpunkt $A(1,\ 1,\ 2)$, Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda\,\vec{v}$

also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

Liegt $P(-3,\ 2,\ 1) \in g$ auf der Geraden g , ist also $P \in g$?

Lösung:
Falls λ existiert, so dass $g(\lambda) = \vec{p}$, dann ist $P \in g$, also
$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\,\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{p} - \vec{a} = \lambda\,\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AP} = \lambda\,\vec{v} \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{AP}$ und $\vec{v}$ sind kollinear.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\dfrac{-4}{-1} \neq \dfrac{1}{1} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AP}$ und $\vec{v}$ sind nicht kollinear, also liegt P nicht auf g .

3. Ist $Q(3,\ -1,\ 0) \in g$?

Lösung: $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

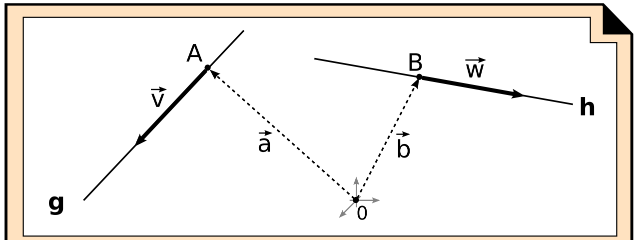
$\dfrac{2}{-1} = \dfrac{-2}{1} = \dfrac{-2}{1} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AQ}$ und $\vec{v}$ sind kollinear, also liegt Q auf g .

Aufgaben:

1. Koordinatenachsen als Geraden.

2. Parallele zur Winkelhalbierenden der x_1-Achse und der x_2-Achse durch den Punkt $P(0,\ 0,\ 3)$.

Inzidenzen von Geraden im $\mathbb{R}^3$



g: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$

h: $\vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{w}$

g∥h $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{w}$ **(Richtungsvektoren sind parallel)**
$\Leftrightarrow \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig (kollinear)
$\Leftrightarrow \vec{v} = k \cdot \vec{w}$, mit einem $k \neq 0$

$\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel

falls: $\begin{cases} v_1 = k \cdot w_1 \\ v_2 = k \cdot w_2 \\ v_3 = k \cdot w_3 \end{cases}$ besitzt Lösung $k \neq 0$

oder: $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3}$

g = h

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \parallel \vec{w}$

$\Leftrightarrow A \in h \quad \Leftrightarrow \quad B \in g$

g ∩ h = {S}

g ∩ h ≠ Ø falls:

Gleichungssystem **g(λ) = h(μ)** ist **lösbar**

also $\vec{a} + \boldsymbol{\lambda} \cdot \vec{v} = \vec{b} + \boldsymbol{\mu} \cdot \vec{w}$

d.h. das Gleichungssystem $\begin{cases} a_1 + \lambda \cdot v_1 = b_1 + \mu \cdot w_1 \\ a_2 + \lambda \cdot v_2 = b_2 + \mu \cdot w_2 \\ a_3 + \lambda \cdot v_3 = b_3 + \mu \cdot w_3 \end{cases}$

mit **3** Gleichungen und den **2** Unbekannten **λ** und **μ** ist **lösbar**.

So gehts:

2 passende der Gleichungen auswählen, λ und μ damit berechnen

Check, ob λ und μ die verbleibende Gleichung erfüllen:

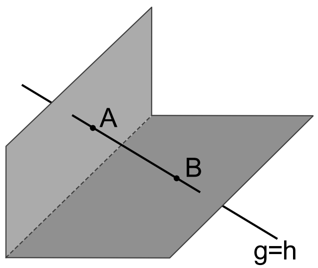
Ja $\Rightarrow$ Schnittpunkt $S(a_1+\lambda v_1 \mid a_2+\lambda v_2 \mid a_3+\lambda v_3)$
oder $S(b_1+\mu w_1 \mid b_2+\mu w_2 \mid b_3+\mu w_3)$

Nein $\Rightarrow$ windschief (keine Schnittpunkt)

Ist g ∥ h ?
- ja → Ist g=h ?
  - ja → g∥h, $g \cap h = g = h$
  - nein → g∥h, $g \cap h = \varnothing$
- nein → Ist g∩h={S} ?
  - ja → g∦h, $g \cap h = \{S\}$
  - nein → g∦h, $g \cap h = \varnothing$

g∥h

$g \cap h = g = h$

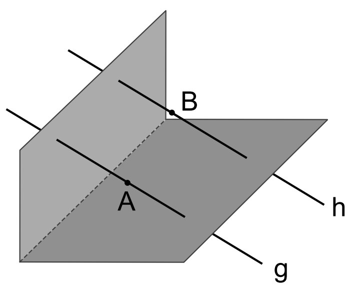


g und h **identisch** und parallel

unendlich viele Schnittpunkte

g∥h

$g \cap h = \varnothing$

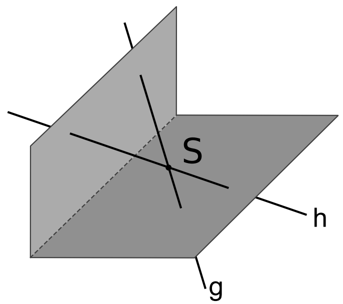


g und h **echt parallel**

kein Schnittpunkt

g∦h

$g \cap h = \{S\}$

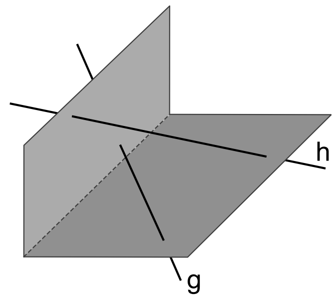


g und h **schneiden sich**

genau ein Schnittpunkt

g∦h

$g \cap h = \varnothing$



g und h sind **windschief**

kein Schnittpunkt