



Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

1. Diskretes Wachstum (Zerfall)

Beispiel:

Verzinsung von Kapital: Startkapital $K_0 = 20$ (€), Jahreszins $p = 3\% = \frac{3}{100}$

Jahr	Kapital
0	$\underbrace{20}_{K_0}$
1	$\underbrace{20}_{K_0} + \frac{3}{100} \cdot \underbrace{20}_{K_0} = 20 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100}\right)}_{= K_1}$
2	$\underbrace{20 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)}_{K_1} + \frac{3}{100} \cdot \underbrace{20 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)}_{K_1} = 20 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^2}_{= K_2}$
3	$\underbrace{20 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2}_{K_2} + \frac{3}{100} \cdot \underbrace{20 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2}_{K_2} = 20 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{3}{100}\right)^3}_{= K_3}$
	...
n	$20 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$

Allgemein:

Ist

- a der Anfangswert zur Zeit $t=0$,
- p der prozentuale Zuwachs pro (Zeit)Einheit,

dann heißt $q := \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ Wachstumsfaktor und es gilt für den Wert $N(t)$ nach t Zeitschritten:

$$N(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t = a \cdot q^t$$

Für $q > 1$ spricht man von Wachstum, für $q < 1$ (z.B. $q = 1 - \frac{p}{100}$) von Abnahme oder Zerfall.

Aufgabe:

Im Jahre 0 wird 1 € mit 1% Jahreszins angelegt. Wann ist das Kapital auf ≥ 1000 € angewachsen und wie viele € wären es im Jahr 2013 ?

Lösung:

$$N(t) = 1 \text{ €} \cdot (1 + 0,01)^{\frac{t}{a}}$$

$$1000 \text{ €} \leq f(t) = 1 \text{ €} \cdot 1,01^{\frac{t}{a}} \Leftrightarrow 1000 \leq 1,01^{\frac{t}{a}} \Rightarrow \ln(1000) \leq \frac{t}{a} \cdot \ln(1,01)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1000)}{\ln(1,01)} a \approx 694,22 a.$$

Das Kapital ist nach 695 Jahren auf über 1000 € angewachsen.

$$N(2013a) = 1 \text{ €} \cdot 1,01^{\frac{2013a}{a}} \approx 499948678 \text{ €}$$

Das Kapital würde 2013 also knapp 500 Millionen € betragen.

2. Kontinuierliches Wachstum (Zerfall)

Von einer ursprünglichen Menge N_0 des radioaktiven Elements ^{222}Rn (Radon) ist nach $T_{\frac{1}{2}} = 3,8$ Tagen nur noch die **Halfte** vorhanden, der Rest ist zerfallen. $T_{\frac{1}{2}}$ wird **Halbwertszeit** genannt.

Mit der obigen Formel ergäbe sich

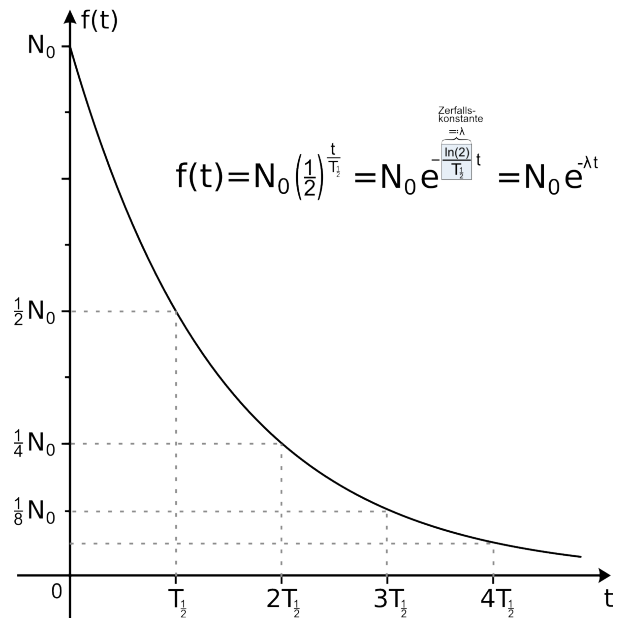
$$N(t) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^t = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t, \text{ wobei hier jeder}$$

Zeitschritt t ein Vielfaches von $T = 3,8 d$ ist ($d = \text{Tag}$), also $t = n \cdot T$, mit $n \in \mathbb{N}$.

Will man t in Tagen einsetzen, ergibt sich:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Dies kann noch umgeformt werden:



$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{\ln(2^{-1}) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\ln(2) \cdot \frac{t}{T}} = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{T} \cdot t}$$

Das ergibt das

Zerfallsgesetz: (Formelsammlung Seite 57 unter Physik!) :

Mit der **Halbwertszeit** $T_{\frac{1}{2}}$ und der **Zerfallskonstanten** $\lambda := \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$ gilt:

$$N(t) = M_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

**Typische Abi-Aufgaben:**

Abi 2011 AI: 2, Abi 2010 AI: 2, Abi 2008 AI: 1

Aufgabe:

Das bevorzugt für Atomwaffen eingesetzte Plutonium ^{239}Pu hat eine Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 24110 \text{ a}$. Bestimmen Sie die Zerfallskonstante λ und berechnen Sie, wie viel Prozent von einem Kilogramm ^{239}Pu nach 1000 Jahren noch übrig ist.

Lösung:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{\ln(2)}{24110 \text{ a}} \approx 2,874936 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{\text{a}}$$

$$N(t) = 1 \text{ kg} \cdot e^{\frac{\ln(2)}{24110 \text{ a}} \cdot t} \approx 1 \text{ kg} \cdot e^{-\frac{2,874936 \cdot 10^{-5}}{\text{a}} \cdot t}$$

$$N(1000 \text{ a}) = 1 \text{ kg} \cdot e^{-\frac{2,874936 \cdot 10^{-5}}{\text{a}} \cdot 1000 \text{ a}} \approx 0,971660 \text{ kg}$$

$$\frac{0,971660 \text{ kg}}{1 \text{ kg}} \approx \mathbf{97,166\%}$$

Nebenbei: Allgemeine Rechnung für Prozentsatz p :

$$p = \frac{N(t)}{N_0} = \frac{N_0 e^{-\lambda \cdot t}}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{\ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}} \cdot t}$$

2.1 Radiokarbonmethode oder ^{14}C - Methode

Entwickelt 1946 von Willard Frank Libby (1908 – 1980), der dafür 1960 den Nobelpreis für Chemie erhielt. Dient zur Altersbestimmung von kohlenstoffhaltigen (meist organischen) Stoffen. Auflösung: ca. 300 a bis 60000 a.

Funktionsweise:

Durch kosmische Strahlung entsteht in der Atmosphäre ständig radioaktiver Kohlenstoff ^{14}C mit der Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = 5735 \text{ a}$. Das Verhältnis $k = \frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}}$ in der Atmosphäre ist über die Jahrtausende

(relativ) konstant.

Pflanzen, die den Kohlenstoff über das Kohlendioxid der Luft aufnehmen und verstoffwechseln, weisen nun ebenfalls in ihrem Körper das gleiche Verhältnis von ^{14}C zu ^{12}C auf. Somit auch alle Organismen die diese Pflanzen fressen.

Stirbt nun ein solcher Organismus, fehlt der Nachschub an ^{14}C und das Verhältnis $\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \rightarrow 0$ geht gegen Null mit der Zeit.

Durch messen der Zerfälle pro Probenmasse (1 g Kohlenstoff weist ca. 16 Zerfälle pro Minute auf)



kann damit das Alter der Probe bestimmt werden.

Beispiel:

1 g Kohlenstoff eines lebenden Organismus zeigt 16,0 Zerfälle pro Minute.

Wie alt ist eine Probe eines mutmasslich prähistorischen Holzpfostens, der pro Gramm 12,2 Zerfälle pro Minute zeigt?

Wie viele Zerfälle wären es, wenn die Probe aus der Zeit der Dinosaurier vor ca. 60 Millionen Jahren stammen würde?

$$\frac{12,2}{16,0} = \frac{N(t)}{N(0)} = \frac{1 \text{ g} \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5735a} \cdot t}}{1 \text{ g}} = e^{-\frac{\ln(2)}{5735a} \cdot t} \Rightarrow \ln\left(\frac{12,2}{16,0}\right) = -\frac{\ln(2)}{5735a} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{12,2}{16,0}\right)}{\ln(2)} \cdot 5735a \approx 2243a \approx 2,24 \cdot 10^3 a$$

Der Pfosten stammt also etwas vor der Zeit um Christi Geburt.

Zerfälle pro Gramm pro Minute nach 60 000 000 Jahren:

$$16,0 \cdot \frac{N(60\,000\,000a)}{g} = 16 \cdot e^{-\frac{\ln(2)}{5735a} \cdot 60\,000\,000a} \approx e^{-7251,76} = 10^{\log(e) \cdot (-7251,76)} \approx 10^{-3149,40}$$

Es müsste also mehr als das 10^{3142} -fache Alter des heutigen Universums auf einen Zerfall gewartet werden.

①

Kosmische Strahlung
Hochenergetische Teilchenstrahlung, vorwiegend Protonen, ca. 1000 Teilchen pro m² und Sekunde

Kosmische Strahlung schlägt **Neutronen** aus Atomen in der Atmosphäre

Ersetzt ein solches Neutron ein Proton in einem ¹⁴N Stickstoffatom, so entsteht radioaktiver Kohlenstoff ¹⁴C mit einer **Halbwertszeit** von T_{1/2} = 5730 a

¹⁴₇N → ¹⁴₆C

②

Durch kosmische Strahlung ständiger Nachschub an radioaktivem Kohlenstoff ¹⁴C

Verhältnis von *radioaktivem* Kohlenstoff ¹⁴C zu *normalem* Kohlenstoff ¹²C ist in der **Atmosphäre** über die Jahrtausende nahezu **konstant**. Damit auch das Verhältnis von *radioaktivem* ¹⁴CO₂ zu *normalem* ¹²CO₂

$$\frac{\text{radioaktivem } ^{14}\text{C}}{\text{normalem } ^{12}\text{C}} = \frac{^{14}\text{CO}_2}{^{12}\text{CO}_2} = k$$

③

$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = k$ in allen Organismen, die sich direkt oder indirekt von Pflanzen (oder anderen Organismen, die atmosphärischen Kohlenstoff verstoffwechseln) ernähren.

$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = k$ in Atmosphäre

$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} = k$ in Pflanzen

Pflanzen verstoffwechseln *radioaktives* ¹⁴CO₂ genau so wie *normales* ¹²CO₂. Daher weist deren organisches Material das gleiche ¹⁴C zu ¹²C Verhältnis auf, wie die Atmosphäre.

④

Nach Tod keine Aufnahme von Kohlenstoff mehr: *Radioaktives* ¹⁴C zerfällt mit einer Halbwertszeit T_{1/2} = 5730 a. Das Verhältnis ¹⁴C zu ¹²C geht daher gegen 0:

$$\frac{^{14}\text{C}}{^{12}\text{C}} \rightarrow 0$$

1 g Kohlenstoff eines **lebenden** Organismus weist **16 Zerfälle pro Minute** auf. Zählt man die Zerfälle pro Minute von 1 g einer **Probe**, so kann damit das **Alter** der Probe **bestimmt** werden.

Mit einer Halbwertszeit von T_{1/2} = 5730 a zerfällt im radioaktiven Kohlenstoff ein Neutron in ein Proton, ein Elektron e⁻ (β-Strahlung) und ein Antineutrino ν⁻. Der Kohlenstoff wird somit wieder zum Stickstoff:

$$^{14}_6\text{C} \rightarrow ^{14}_7\text{N}$$