Integralrechnung

Im folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das mit mindestens 2 verschiedene Punkte enthält.

1. Stammfunktionen

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $\boldsymbol{F} : I \to \mathbb{R}$ heißt ***Stammfunktion*** einer Funktion $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}$, falls $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Es gilt:

Die Funktionen $\boldsymbol{F_C} : y = F(x) + \boldsymbol{C},\ C \in \mathbb{R}$ sind dann ebenfalls Stammfunktionen von f,

denn $F_C'(x) = \left(F(x)+C\right)' = F'(x) + \underbrace{C'}_{=0} = f(x)$.

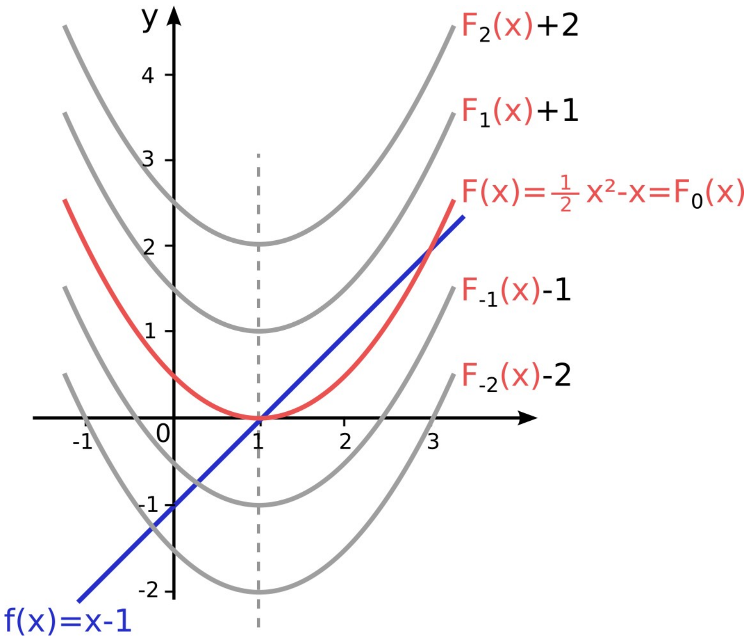
Dies ist klar, da die Konstante C die Stammfunktion nur in y-Richtung nach oben oder unten verschiebt, was die Steigung von F und damit die Steigungsfunktion (= 1-te Ableitung) f ja nicht verändert.

Anmerkung:

Stammfunktionen finden ist also die Umkehrung der Ableitung, es wird daher auch manchmal als „Aufleiten" bezeichnet.

Beispiel:

$$f(x) = x - 1 \ \Rightarrow\ F_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$



Es gelten folgende allgemeine Regeln:

Funktion	Stammfunktion	Bemerkungen
$a \cdot f(x)$	$a \cdot F(x) + C$	$a \in \mathbb{R}$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x) + C$	
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$	Einfacher Fall der umgekehrten Kettenregel

Wichtige Stammfunktionen:

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F_C(x)$	Bemerkungen
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}+C$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(\lvert x \rvert)+C$	Definitionsbereich und Vorzeichen beachten!
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln(\lvert g(x) \rvert)+C$	Definitionsbereich und Vorzeichen beachten!
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}+C$	
e^x	e^x+C	
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert \cos(x) \rvert)+C$	Definitionsbereich und Vorzeichen beachten!
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1}(x)+C = \arcsin(x)+C$	
$\frac{1}{x^2+1}$	$\tan^{-1}(x)+C = \arctan(x)+C$	

Aufgaben:

Bestimmen Sie jeweils die Stammfunktionen zu

1. $f(x) = 2$

2. $f(x) = x^2-3$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

4. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

5. $f(x) = -\frac{1}{2x+1}$

6. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$

7. $v(t) = A\cos(\omega t+\phi_0)$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ (*)

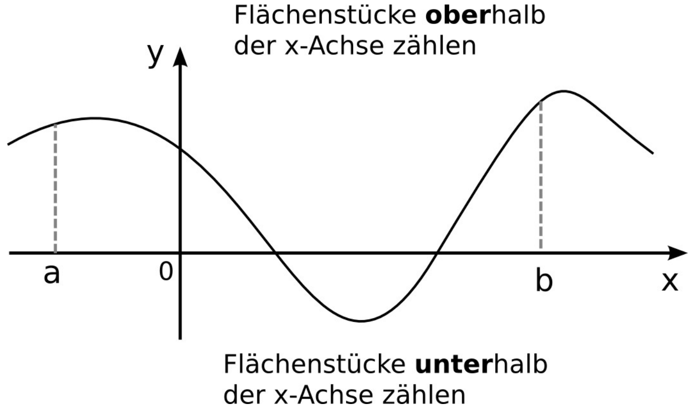
$a(t) = a \cdot t$

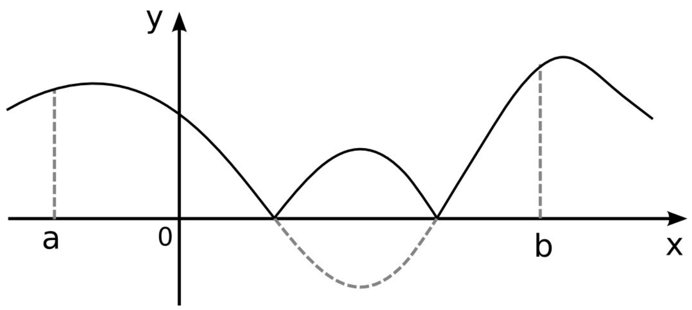
9. Ermitteln Sie die Stammfunktion $v(t)$ der Funktion $a(t) = a \cdot t$, sowie die Stammfunktion $s(t)$ von $v(t)$. Interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch!

2. Volumenmessung im $\mathbb{R}^2$ (= Flächenmessung)

Im folgenden ist eine stetige Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, sowie $a, b, x_0 \in I$ mit einem Intervall $I \subseteq D$.

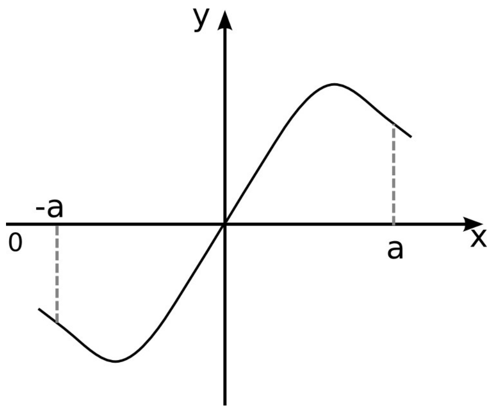
Wir interessieren uns für die **Flächenbilanz** bzw. den **Flächeninhalt** zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[a, b]$.





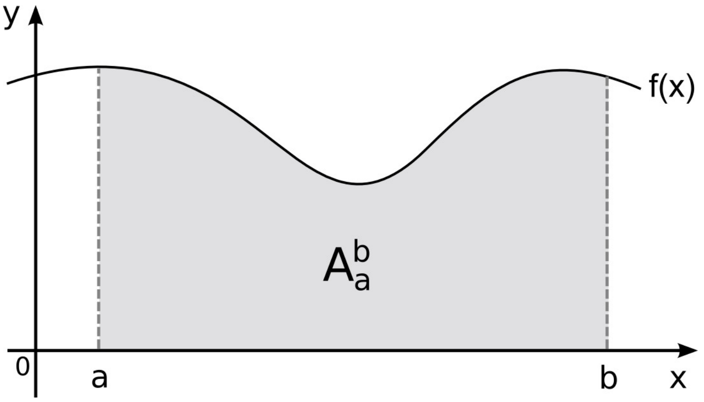
Aufgabe:

Geben Sie die Flächenbilanz für das Intervall $[-a, a]$ an, wenn f punktsymmetrisch bezüglich dem Ursrung ist..

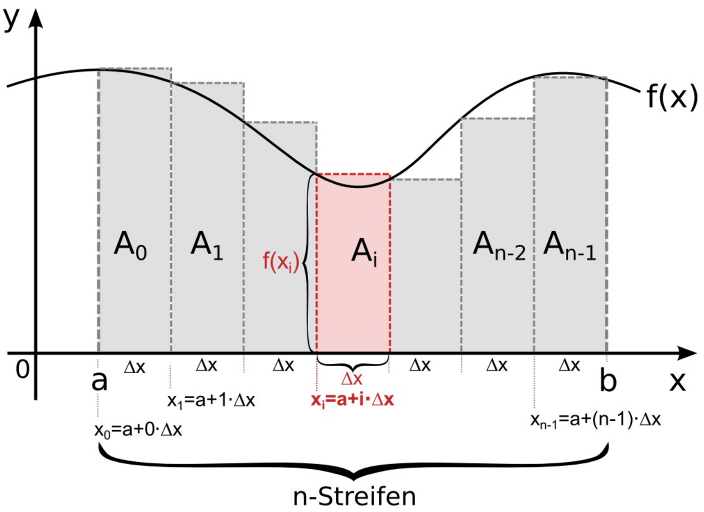


Das bestimmte Integral

Bestimmung der Flächenbilanz A_a^b



mit der **Streifenmethode**



Anzahl der Streifen

Streifenbreite

Position (der linken Seite) des i -ten Streifens A_i

Höhe des i -ten Streifens A_i

Flächeninhalt des i -ten Streifens A_i

Aufgabe

Bestimmen Sie jeweils $\int_0^x 1\,dt$, $\int_0^x t\,dt$ und $\int_0^x t^2 dt$ mit der Streifenmethode.

Beachten Sie hierbei, dass aus „kosmetischen" Gründen die obere Grenze mit x und die Variable mit t bezeichnet wurde.

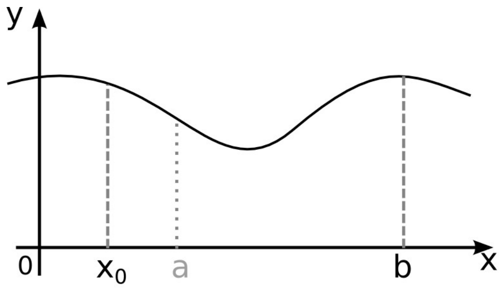
Definition

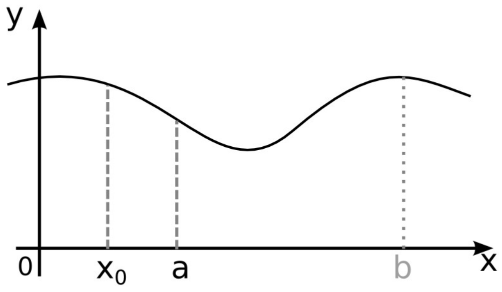
Ist F eine Stammfunktion von f , so heißt die Menge aller Stammfunktionen von f das ***unbestimmte Integral von*** $\boldsymbol{f}$ und wird mit $\boldsymbol{\int f(x)\,dx := F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}}$ bezeichnet.

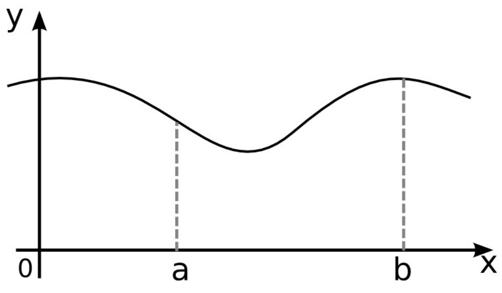
Die durch $\boldsymbol{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$ definierte Funktion heißt ***Integralfunktion***,

$f(x)$ heißt ***Integrand.***

Beachte







Es ergibt sich der „Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung:

Satz

Ist $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I\rightarrow\mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f , dann gilt für alle $a, b\in I$

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) =: [F]_a^b}$$

Beachte

Die Integrationskonstante hebt sich durch die Subtraktion auf, das bestimmte Integral enthält keine Integrationskonstante mehr.

Regeln:

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$, denn $F(a) - F(a) = 0$

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, denn $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, für $c \in I$ Summeneigenschaft des Integrals

Beispiele:

- $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\right) = \frac{3}{2}$
- $\int_2^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot x^2\right]_2^1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\right) = -\frac{3}{2}$
- $\int_2^7 \left(\frac{3}{4}x^3 + 2x^2\right)dx = \left[\frac{3}{16}\cdot x^4 + \frac{2}{3}\cdot x^3\right]_2^7 = \left(\frac{3}{16}\cdot 7^4 + \frac{2}{3}\cdot 7^3\right) - \left(\frac{3}{16}\cdot 2^4 + \frac{2}{3}\cdot 2^3\right) \approx 670{,}52$
- $\int_{-5}^5 \left(\frac{1}{5}x^3 + 3x\right)dx = 0$, da Funktion punktsymmetrisch bzgl. Ursrung.