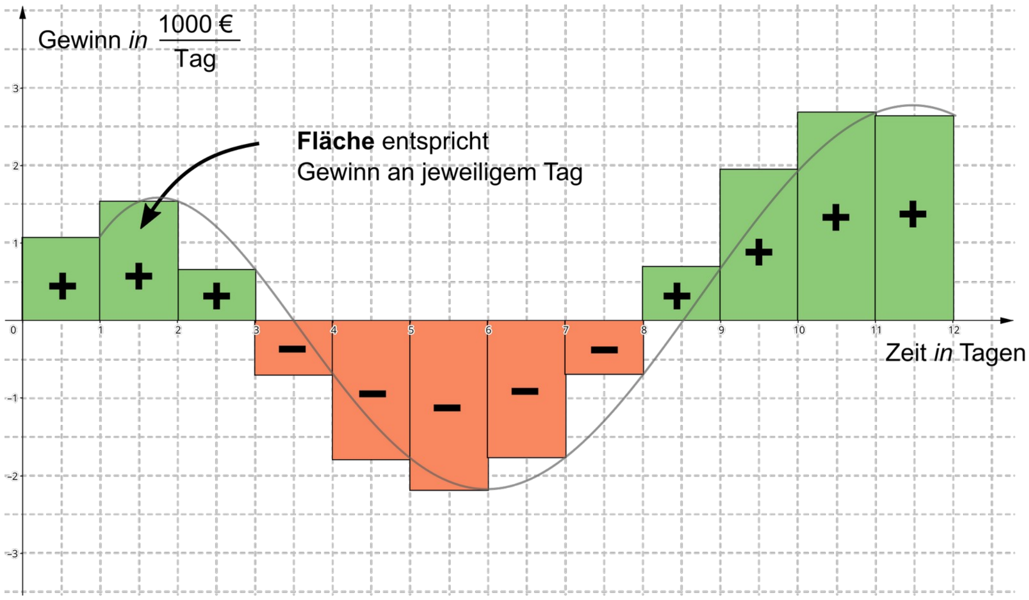
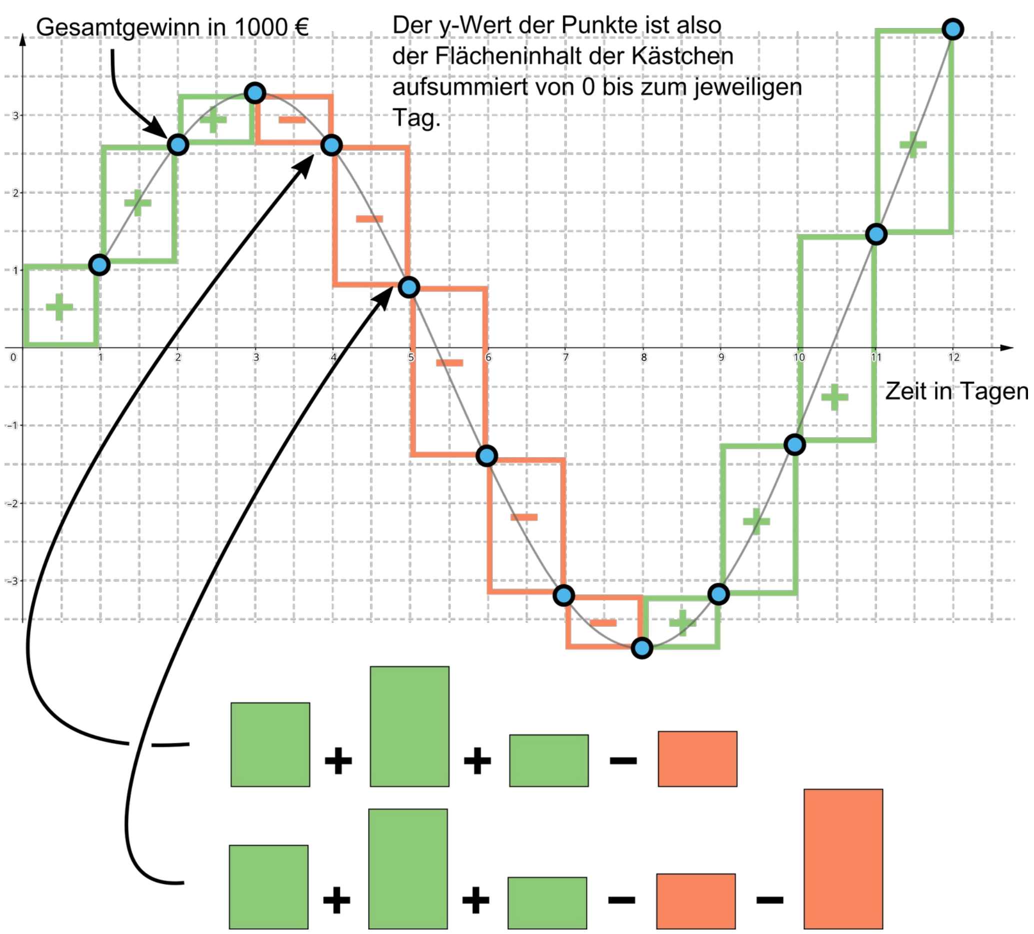
Integration

„Zusammenschluss, Vereinigung“ vom lateinischen *integrare* „wiederherstellen, erneuern“

1. Motivation

In einem Unternehmen wird jeden Tag der Gewinn ermittelt. Die folgende Kurve zeigt den nach rechts die Zeit in Tagen und nach oben den Gewinn pro Tag.





Der jeweilige Flächeninhalt entspricht dann dem Gewinn an einem Tag.

Will man den Gesamtgewinn von Anfang bis zu einem bestimmten Tag ermitteln, so müssen die Einzelnen Gewinne am Tag, also die Flächeninhalte aufsummiert werden.
Der durchschnittliche Gewinn am Tag ergibt sich dann aus der Summe dividiert durch die Anzahl der Tage bis dahin.

Ermittelt man den Gewinn nicht pro Tag, sondern z.B. pro Sekunde ergeben sich allmählich glatte Kurven.

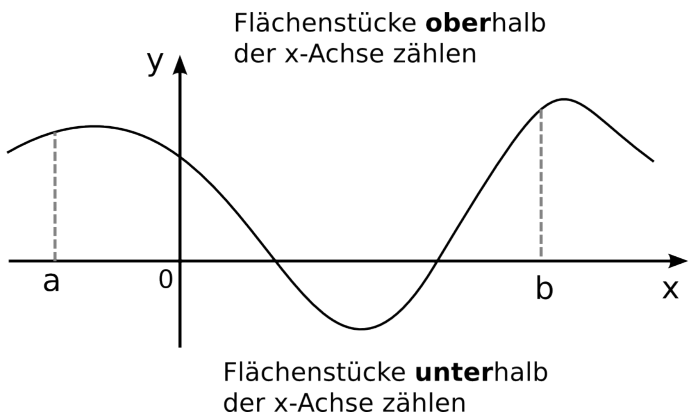
Für die Summe der Flächeninhalte A_i kann man auch $\sum A_i$ schreiben (Σ ist das griechische S: für **S**umme)

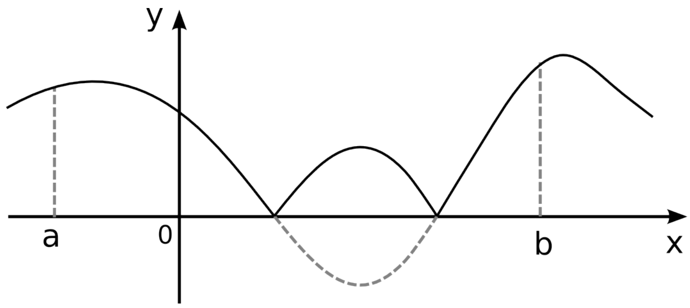
Macht man die Zeitschritte unendlich klein schreibt man $\int$ satt $\sum$ („glattes“ S).

2. Volumenmessung im $\mathbb{R}^2$ (= Flächenmessung)

Im folgenden ist eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ gegeben, sowie $a, b, x_0 \in I$ mit einem Intervall $I \subseteq D$.

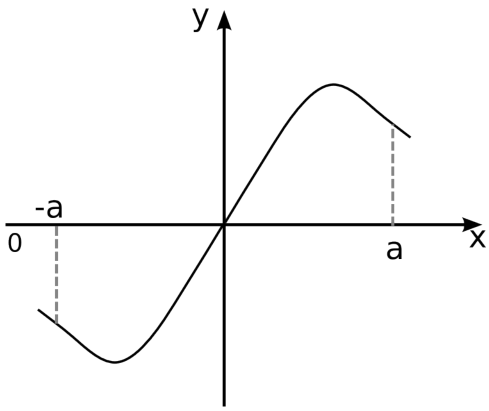
Wir interessieren uns für die **Flächenbilanz** bzw. den **Flächeninhalt** zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[a, b]$.





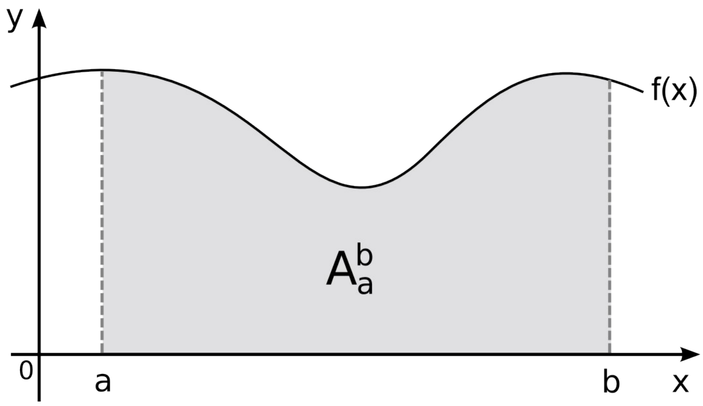
Aufgabe:

Geben Sie die Flächenbilanz für das Intervall $[-a, a]$ an, wenn f punktsymmetrisch bezüglich dem Ursrung ist..

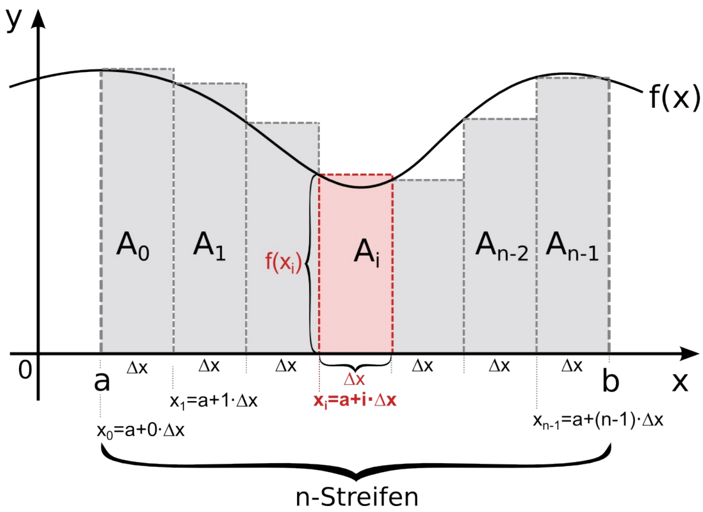


Das bestimmte Integral

Bestimmung der Flächenbilanz A_a^b



mit der **Streifenmethode**



Anzahl der Streifen

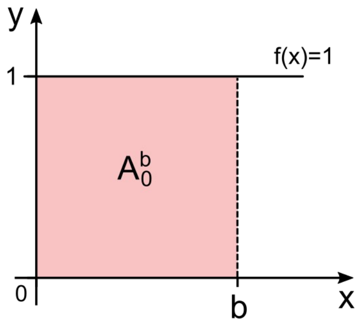
Streifenbreite

Position (der linken Seite) des i -ten Streifens A_i

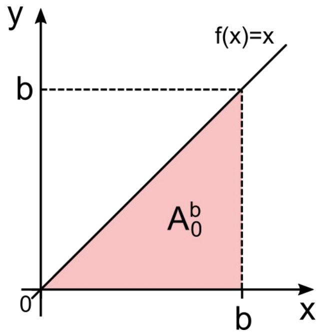
Höhe des i -ten Streifens A_i

Flächeninhalt des i -ten Streifens A_i

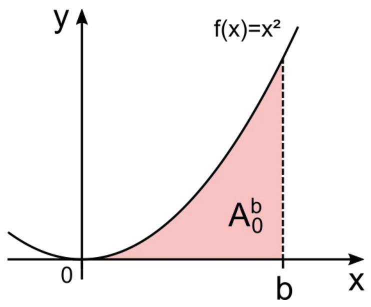
$$f(x) = 1 = \boldsymbol{x^0} \Rightarrow \int_0^b f(x)dx = \int_0^b 1 \cdot dx = b = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{b^1}$$



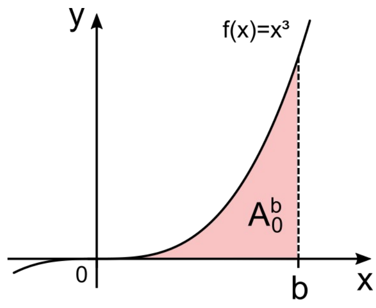
$$f(x) = x = \boldsymbol{x^1} \Rightarrow \int_0^b f(x)dx = \int_0^b x \cdot dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{b^2}$$



$$f(x) = \boldsymbol{x^2} \Rightarrow \int_0^b f(x)dx = \int_0^b x^2 \cdot dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \cdot \boldsymbol{b^3}$$



$$f(x) = \boldsymbol{x^3} \Rightarrow \int_0^b f(x)dx = \int_0^b x^3 \cdot dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \boldsymbol{b^4}$$



Allgemein: $\int_0^b x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot b^{n+1}$

Herleitung mit Streifenmethode:

$f(x) = 1$:

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b 1 \cdot dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-0}{n} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} 1}_{=n-1}\right) = b \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = b$$

$f(x) = x$:

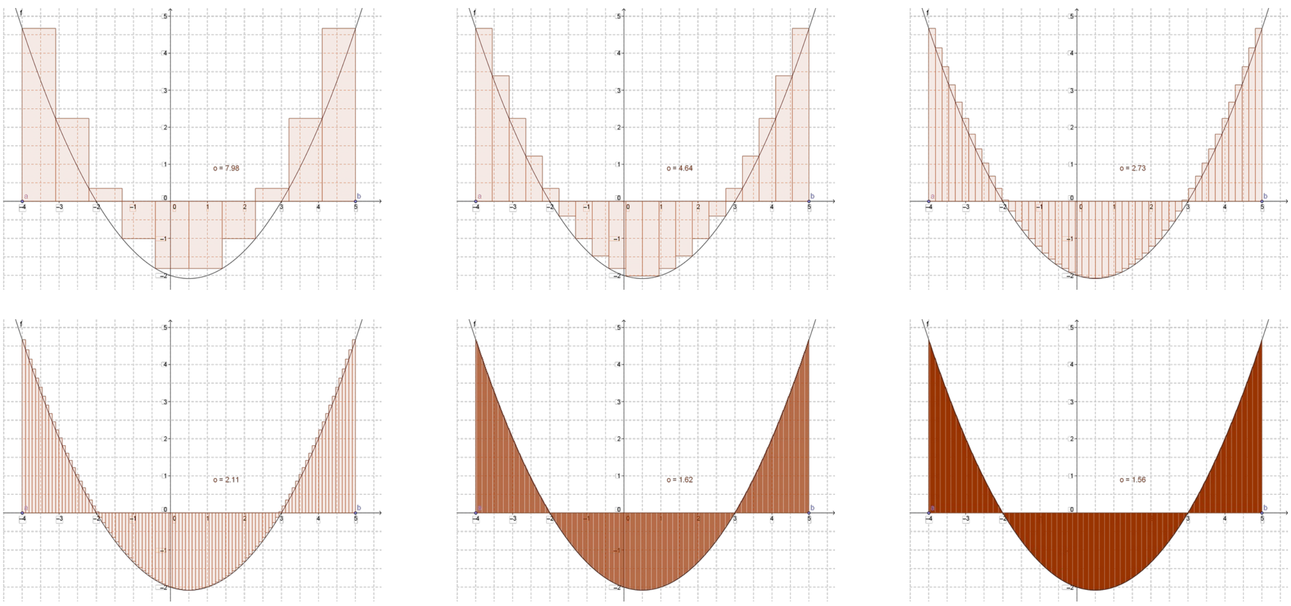
$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\,dx &= \int_0^b x \cdot dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{x_i}_{a+i\cdot\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \Delta x \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{b-0}{n}\right)^2 \cdot \frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{1}{2}b^2 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{2}b^2\end{aligned}$$

$f(x) = x^2$:

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\,dx &= \int_0^b x^2 \cdot dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (i \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{b-0}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = b^3 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}b^3\end{aligned}$$

$f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned}\int_0^b f(x)\,dx &= \int_0^b x^3 \cdot dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i^3 \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} (i \cdot \Delta x)^3 \cdot \Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\Delta x^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{b-0}{n}\right)^4 \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4}\right) = b^4 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}b^4\end{aligned}$$



Im folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das mindestens 2 verschiedene Punkte enthält.

3. Stammfunktionen

Definition:

Eine differenzierbare Funktion $\boldsymbol{F} : I \to \mathbb{R}$ heißt ***Stammfunktion*** einer Funktion $\boldsymbol{f} : I \to \mathbb{R}$, falls $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Es gilt:

Die Funktionen $\boldsymbol{F_C} : y = F(x) + \boldsymbol{C}$, $C \in \mathbb{R}$ sind dann ebenfalls Stammfunktionen von f,

denn $F_C'(x) = (F(x)+C)' = F'(x) + \underbrace{C'}_{=0} = f(x)$.

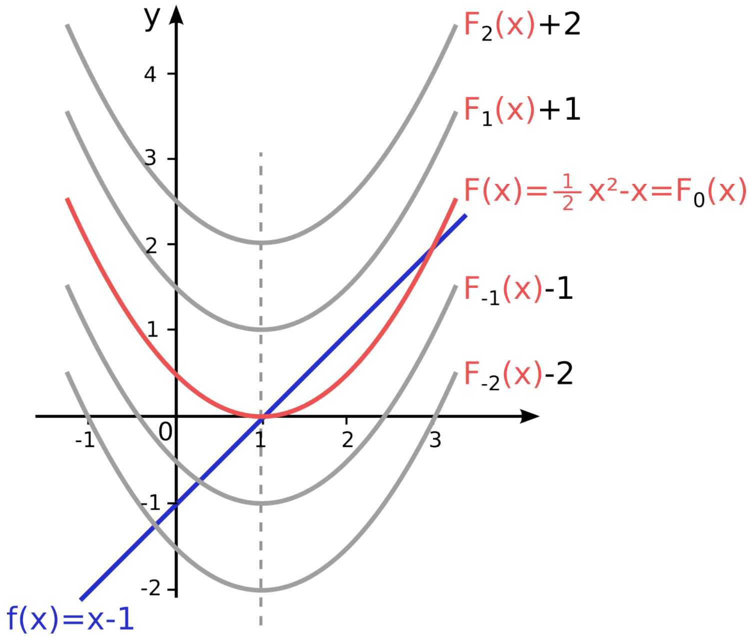
Dies ist klar, da die Konstante C die Stammfunktion nur in y-Richtung nach oben oder unten verschiebt, was die Steigung von F und damit die Steigungsfunktion (= 1-te Ableitung) f ja nicht verändert.

Anmerkung:

Stammfunktionen finden ist also die Umkehrung der Ableitung, es wird daher auch manchmal als „Aufleiten“ bezeichnet.

Beispiel:

$$f(x) = x - 1 \;\Rightarrow\; F_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$



Es gelten folgende allgemeine Regeln:

Funktion	Stammfunktion	Bemerkungen
$a \cdot f(x)$	$a \cdot F(x) + C$	$a \in \mathbb{R}$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x) + C$	
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C$	Einfacher Fall der umgekehrten Kettenregel

Wichtige Stammfunktion:

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F_C(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}+C$, $n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Aufgaben:

Bestimmen Sie jeweils die Stammfunktionen zu

1. $f(x)=2$ **2.** $f(x)=x^2-3$ **3.** $f(x)=(x-1)(x+2)$

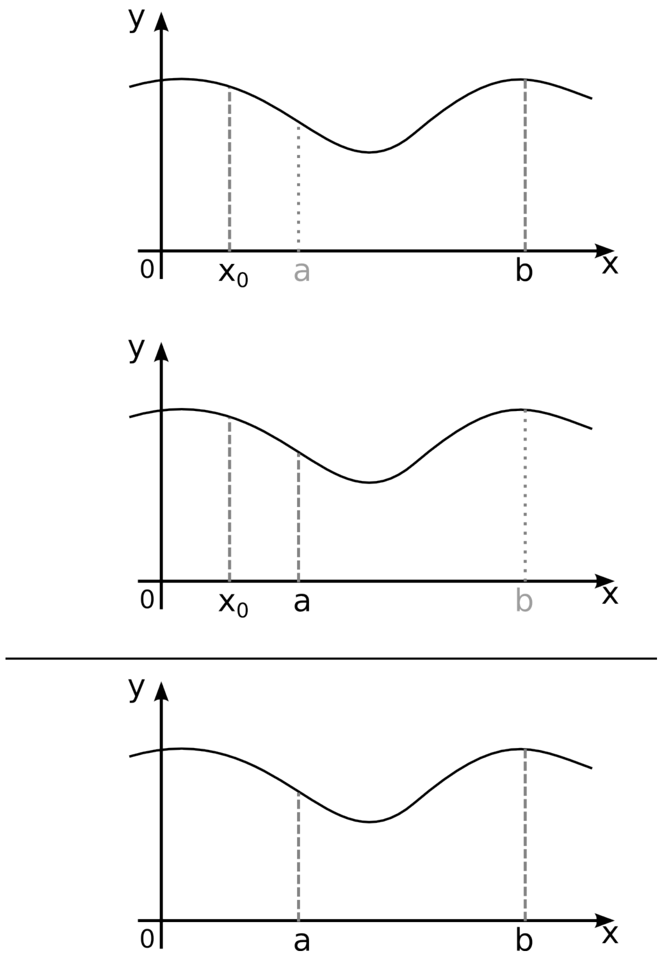
Definition

Ist F eine Stammfunktion von f , so heißt die Menge aller Stammfunktionen von f das ***unbestimmte Integral von*** $\boldsymbol{f}$ und wird mit $\boldsymbol{\int f(x)\,dx := F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}}$ bezeichnet.

Die durch $\boldsymbol{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$ definierte Funktion heißt ***Integralfunktion***,

$f(x)$ heißt ***Integrand.***

Beachte



Es ergibt sich der „Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung:

Satz

Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f, dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\boldsymbol{\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: [F]_a^b}$$

Beachte

Die Integrationskonstante hebt sich durch die Subtraktion auf, das bestimmte Integral enthält keine Integrationskonstante mehr.

Regeln:

$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$, denn $F(a) - F(a) = 0$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$, denn $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$, für $c \in I$ Summeneigenschaft des Integrals

Beispiele:

- $\int\limits_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_1^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) = \frac{3}{2}$
- $\int\limits_2^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_2^1 = \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2\right) = -\frac{3}{2}$
- $\int\limits_2^7 \left(\frac{3}{4} x^3 + 2x^2\right) dx = \left[\frac{3}{16} \cdot x^4 + \frac{2}{3} \cdot x^3\right]_2^7 = \left(\frac{3}{16} \cdot 7^4 + \frac{2}{3} \cdot 7^3\right) - \left(\frac{3}{16} \cdot 2^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^3\right) \approx 670{,}52$
- $\int\limits_{-5}^5 \left(\frac{1}{5} x^3 + 3x\right) dx = 0$, da Funktion punktsymmetrisch bzgl. Ursprung.