Exponentialfunktion: Kurvendiskussion Aufgaben I

$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$

Maximale Definitionsmenge D_{max} :

$D_{max}=\mathbb{R}$, da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und $-\frac{x^2}{2}$ ebenfalls.

Verhalten an den Grenzen der Definitionsmenge:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{e^{\frac{x^2}{2}}}_{\to+\infty}}\right)\to 0$$

Nullstellen: keine, da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt.

$$f'(x)=\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'=e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=-x\,f(x)$$

$$f''(x)=(-x\,f(x))'=-x\,f'(x)-f(x)=-x(-x\,f(x))-f(x)=x^2 f(x)-f(x)=(x^2-1)\,f(x)$$

Mögliche Extremstellen:

f'(x) = 0

1 $f: D_f\to\mathbb{R}\ ;\quad x\mapsto\frac{1}{(x-1)^2+1}$

1.1 Keine Nullstellen da Zähler $\neq 0$,
und keine Definitionslücken, da Nenner $\underbrace{\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}+1}_{>1}>0$ (oder mit Dsikriminante),
also ist $D_f=\mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge.

Es gilt:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{(x-1)^2+1}\right)'=\left(\frac{1}{x^2-2x+2}\right)'=-\frac{1}{(x^2-2x+2)^2}\cdot(2x-2)=-2\,\frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$f''(x)=\left(-2\,\frac{x-1}{(x^2-2x+2)^2}\right)'=-2\cdot\frac{(x^2-2x+2)^2-(x-1)2(x^2-2x+2)(2x-2)}{(x^2-2x+2)^4}$$

$$=-2\cdot\frac{(x^2-2x+2)-(x-1)2(2x-2)}{(x^2-2x+2)^3}=-2\cdot\frac{x^2-2x+2-4x^2+8x-4}{(x^2-2x+2)^3}$$

$$=-2\cdot\frac{-3x^2+6x-2}{(x^2-2x+2)^3}=\underline{2\cdot\frac{3x^2-6x+2}{(x^2-2x+2)^3}}$$

1.2 *Mögliche Extremstellen:* $f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=1$ (einfach mit VZW)
Da $(x^2-2x+2)^3\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ ist (siehe **1.1**),
ist $x=1$ Extremstelle.

$$f''(1) = 2 \cdot \frac{3-6+2}{(1-2+2)^3} = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \textit{Maximum}\,; \quad f(1) = \frac{1}{1-2+2} = 1\,.$$

(Alternativ über Vorzeichentabelle)

Somit ist der HOP $P_H(1;1)$ der einzige Extrempunkt.

1.3 *Maximale Monotonieintervalle:* **smz** in $]-\infty;1]$ und **sma** in $[1;\infty[$,

denn Testwert: $f'(0) = -2\frac{-1}{2^2} = \frac{1}{2} > 0$ und VZT:

x		1	
f'(x)	+	0	-
	/	$\overline{\circ}$	\

1.4 *Mögliche Wendestellen:* wegen $(x^2-2x+2)^3 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (siehe 1.1) gilt:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 6x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

(jeweils einfach mit VZW)

Testwert: $f''(1) = -2$ (siehe **1.2**)

VZT:

x		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	
f''(x)	+	0	-	0	+

$$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}-1\right)^2+1} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{3}{9}+1} = \frac{3}{4}$$

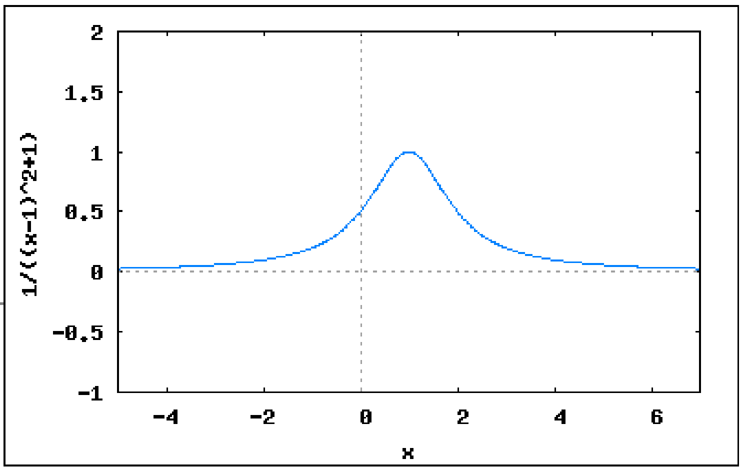
$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}-1\right)^2+1} = \frac{1}{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{\frac{3}{9}+1} = \frac{3}{4}$$

Somit sind $W_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3};\frac{3}{4}\right)$ und $W_1\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{3}{4}\right)$ die Wendepunkte des Graphen von f.

1.5 *Maximale Krümmungsintervalle:* aus der Vorzeichentabelle von f'' ist ersichtlich:

linksgekrümmt in den Intervallen $\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right]$ und $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{3};\infty;\right[$,

rechtsgekrümmt im Intervall $\left[\frac{3-\sqrt{3}}{3};\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$.



Oder schneller mit Trick:

Die Funktion f geht aus $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\quad x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ durch „Verschieben" um 1 in x-Richtung hervor. g ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse, da

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = g(x)$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot 2x = \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$g''(x) = \left(\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)^2 \cdot (-2) - (-2x)\, 2\left(x^2+1\right) 2x}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{-2\left(x^2+1\right)+8x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Extrempunkte und Wendepunkte etc. wie oben (eben nur einfacher und unter ausnützen der Symmetrie!!!).

Dann einfach zu den x-Werten jeweils 1 addieren: Fertig!

$$a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$