1. Anleitung: gebrochen rationale Funktionen am Beispiel:

Aufgabe jeweils: Maximale Definitionsmenge $D_{max} \subseteq \mathbb{R}$ und Lage und Art der Definitionslücken bzw. Nullstellen in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Parameter im Zähler

$$f_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x^2+k)}{(x-1)(x-2)(x^2-x-2)}, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. So weit wie möglich faktorisieren:

$$f_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x^2+k)}{(x-1)(x-2)(x+1)(x-2)}$$

2. Maximale Definitionsmenge $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{Nullstellen\, des\, Nenners\}$:

$$D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-1;\, 1;\, 2\}$$

3. So weit wie möglich kürzen:

$$f_k(x) = \frac{x^2+k}{(x+1)(x-2)}$$

4. Faktor aus Nenner verschwunden ⇒ behebbare Definitionslücke, Rest sind mögliche Polstellen:

$x=1$ ist behebbare Definitionslücke für alle $k \in \mathbb{R}$ (da Term $(x-1)$ verschwunden ist)

Mögliche Polstellen: $x=-1$ und $x=2$

5. Spezialfälle berechnen:

a) Einsetzten der **möglichen Polstellen** in den Zähler und diesen 0 setzen:

- $x=\mathbf{-1}$ in Zähler: $(\mathbf{-1})^2+k=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\boldsymbol{k=-1}}$

b) Mit diesen gefundenen k-Werten jeweils den speziellen Funktionsterm berechnen:

$$\Rightarrow \quad f_{-1}(x) = \frac{x^2-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-\mathbf{2}}$$

c) Werte ablesen

⇒ $x=\mathbf{2}$ ist Polstelle der Ordnung 1

und $x=-1$ ist behebbare Definitionslücke (ebenso wie $x=1$, siehe oben).

d) Ebenso die weiteren möglichen Polstellen:

- $x=\mathbf{2}$: $(\mathbf{2})^2+k=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\boldsymbol{k=-4}}$

$$\Rightarrow \quad f_{-4}(x) = \frac{x^2-4}{(x+1)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+2}{x+\mathbf{1}}$$

⇒ $x=\mathbf{-1}$ ist Polstelle der Ordnung 1 und $x=2$ ist behebbare Definitionslücke.

6. Die anderen Werte ohne die Spezialfälle betrachten, hier sind die möglichen Polstellen wirklich Polstellen:

- $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}}}$:

  $\Rightarrow$ $x=-1$ und $x=2$ je Polstelle der Ordnung 1.

7. Mögliche Nullstellen (sind Nullstellen des Zählers):

a) Zuerst die Spezialfälle von den Definitionslücken betrachten:

- $\underline{\boldsymbol{k=-1}}$ $\Rightarrow$ $f_{-1}(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x=1 \notin D_{max}}$ (!) d.h. keine Nullstelle! (Definitionslücke!)
- $\underline{\boldsymbol{k=-4}}$ $\Rightarrow$ $f_{-4}(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ $\Rightarrow$ $x=-2 \in D_{max}$ ist einzige und einfache Nullstelle.

b) Dann die anderen Werte ohne die Spezialfälle betrachten: **Mögliche Nullstellen**:

Sei nun $\boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}}$:

Mögliche Nullstellen: $x^2+k=0 \;\Leftrightarrow\; x^2=-k \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\sqrt{-k}$

- $\Rightarrow$ keine Nullstelle für $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R}^+}} =]0; \infty[$
- $\underline{\boldsymbol{k=0}}$ $\Rightarrow$ $x=0$ ist einzige und 2-fache Nullstelle.
- $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1; -4\}}}$ $\Rightarrow$ $x_{1/2}$ sind die zwei einzigen Nullstellen, jeweils mit Vielfachheit 1.

Alternative 1 zu **5**:

Polnomdivision, dann das gleiche Prozedere nur mit dem Rest:
Vorteil: weniger Arbeit, falls Polynomdivision schon gemacht.

$$f_k(x) = 1 + \frac{x+k+2}{(x+1)(x-2)}$$

- $x=-1$ in Zähler des Restbruches: $(-1)+k+2=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\boldsymbol{k=-1}}$

  $\Rightarrow$ $f_{-1}(x) = 1 + \dfrac{x+(-1)+2}{(x+1)(x-2)} = 1 + \dfrac{x+1}{(x+1)(x-2)} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$

  $\Rightarrow$ $x=2$ ist Polstelle der Ordnung 1 und $x=-1$ ist behebbare Definitionslücke

- $x=2$ in Zähler des Restbruches: $(2)+k+2=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{\boldsymbol{k=-4}}$

  $\Rightarrow$ $f_{-4}(x) = 1 + \dfrac{x+(-4)+2}{(x+1)(x-2)} = 1 + \dfrac{x-2}{(x+1)(x-2)} = 1 + \dfrac{1}{x+1}$

  $\Rightarrow$ $x=-1$ ist Polstelle der Ordnung 1 und $x=2$ ist behebbare Definitionslücke

- $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}}}$:

  $\Rightarrow$ $x=-1$ und $x=2$ je Polstelle der Ordnung 1.

Alternative 2 zu **5**:

Zusätzlich den Zähler faktorisieren:

- $\boldsymbol{k > 0}$ $\Rightarrow$ Zähler hat keine Nullstelle

  $\Rightarrow$ $x=-1$ und $x=2$ sind Polstellen jeweils der Ordnung 1.

  $\boldsymbol{k \leq 0}$ $\Rightarrow$ $f_k(x) = \dfrac{(x+\sqrt{-k})(x-\sqrt{-k})}{(x+1)(x-2)}$

  Direkt ersichtlich: Es gibt zwei Fälle in denen sich ein Faktor kürzen lässt:

  $k=-1$ und $k=-4$:

  oder mit Rechnung: $x+\sqrt{-k} = x+1$ $\Leftrightarrow$ $k=-1$ und so weiter ... alle Kombinationen durch.

- Für $\boldsymbol{k=-1}$ ist $f_{-1}(x) = \dfrac{(x+\sqrt{-(-1)})(x-\sqrt{-(-1)})}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2}$

  $\Rightarrow$ $x=2$ ist Polstelle der Ordnung 1 und $x=-1$ ist behebbare Definitionslücke

- Für $\boldsymbol{k=-4}$ ist $f_{-4}(x) = \dfrac{(x+\sqrt{-(-4)})(x-\sqrt{-(-4)})}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{x+2}{x+1}$

  $\Rightarrow$ $x=-1$ ist Polstelle der Ordnung 1 und $x=2$ ist behebbare Definitionslücke

- $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}_0^- \setminus \{-1; -4\}}$:

  $\Rightarrow$ $x=-1$ und $x=2$ je Polstelle der Ordnung 1.

1.2 Parameter im Nenner

$$f_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x^2-x-2)}{(x-1)(x-2)(x^2+k)}\ ,\quad k\in\mathbb{R}$$

1. So weit wie möglich faktorisieren:

$$f_k(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x^2+k)}$$

2. Definitionslücken sind Nullstellen des Nenners:

Erst die klaren Fälle:

Sofort abzulesen $\Rightarrow$ $x=1$ und $x=2$ sind immer Definitionslücken!

3. So weit wie möglich kürzen:

$$f_k(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2+k}$$

4. Spezialfälle berechnen:

a) Einsetzten der **möglichen Nullstellen** in den Nenner und diesen 0 setzen:

Mögliche Nullstellen des Zählers: $x=-1$ und $x=2$.

- $x=\mathbf{-1}$ in Zähler: $(\mathbf{-1})^2+k=0 \iff \underline{\boldsymbol{k=-1}}$

b) Mit diesen gefundenen k-Werten jeweils den speziellen – vollständig gekürzten – Funktionsterm berechnen:

$$\Rightarrow\ f_{-1}(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

c) Werte ablesen:

$\Rightarrow$ $x=1$ und $x=-1$ sind zusätzliche Definitionslücken,

also $D_{max}=\mathbb{R}\backslash\{-1;\ 1;\ 2\}$, es gibt somit 3 Definitionslücken,

wobei $x=-1$ und $x=2$ behebbar sind und $x=1$ Polstelle der Ordnung 1.

d) Ebenso die weiteren möglichen Polstellen:

- $x=\mathbf{2}$ in Nenner: $(2)^2+k=0 \Rightarrow \underline{\boldsymbol{k=-4}}$

$$\Rightarrow\ f_{-4}(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x^2-4} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+1}{x+2}$$

$\Rightarrow$ $x=2$ und $x=-2$ sind zusätzliche Definitionslücken,

also $D_{max}=\mathbb{R}\backslash\{-2;\ 1;\ 2\}$, es gibt somit 3 Definitionslücken,

wobei $x=1$ und $x=2$ behebbar sind und $x=-2$ Polstelle der Ordnung 1.

5. Die anderen Werte ohne die Spezialfälle betrachten:

$\boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}}$:

Mögliche **zusätzliche** Definitionslücken:

$x^2 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -k \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm\sqrt{-k}$

- Für $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R}^+}}$ keine Lösung $\Rightarrow$ keine weitere Definitionslücken $\Rightarrow$ $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

  $\Rightarrow \; f_k(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2+k}$ $\Rightarrow$ die einzigen 2 Definitionslücken $x=1$ und $x=2$ sind behebbar.

- $\underline{\boldsymbol{k=0}}$ $\Rightarrow \; f_0(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2}$ $\Rightarrow \; D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{0; 1; 2\}$.

  Von den drei Definitionslücken sind $x=1$und $x=2$ behebbar,

  $x=0$ ist Polstelle der Ordnung 2.

- $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R}^- \setminus \{-1; -4\}}}$ $\Rightarrow \; f_k(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+\sqrt{-k})(x-\sqrt{-k})}$ und $D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2; -\sqrt{-k}; \sqrt{-k}\}$.

  Von den vier Definitionslücken sind $x=1$ und $x=2$ behebbar,

  $x=-\sqrt{-k}$ und $x=\sqrt{-k}$ sind jeweils Polstellen der Ordnung 1.

6. Nullstellen

Spezialfälle der Nullstellen ergeben sich aus den Spezialfällen der Definitionslücken
unter Punkt **4** !

Beachte: Aufpassen, ob Nullstelle auch in D_{max} liegt!

$\boldsymbol{x = 2} \notin D_{max}$ für alle $k \in \mathbb{R}$, somit auch **nie** Nullstelle von f_k .

- $\underline{\boldsymbol{k=-1}}$ $\Rightarrow \; f_{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$ $\Rightarrow \; D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1; 2\}$ $\Rightarrow$ keine Nullstellen ($x=2 \notin D_{max}$!)

- $\underline{\boldsymbol{k=-4}}$ $\Rightarrow \; f_{-4}(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ $\Rightarrow \; D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1; 2\}$ $\Rightarrow \; x=-1$ ist einfache und einzige NST.

- $\underline{\boldsymbol{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}}}$ $\Rightarrow \; f_k(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2+k}$ $\Rightarrow \; x=-1$ ist einfache und einzige Nullstelle ($x=2 \notin D_{max}$!).