Exponentialfunktion/Logarithmus

1. Funktionen

Merke: $e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} \approx 2{,}7183$ heißt Eulerzahl

Exponentialfunktion zur ***Basis*** b $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto \boldsymbol{b^x} := \exp_b(x)$ Funktion

Logarithmus von x zur ***Basis*** b $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \boldsymbol{\log_b(x)}$ Umkehrfunktion

mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Definitionen:

$\ln(x) := \log_e(x)$ **l**ogarithmus **n**aturalis, Natürlicher Logarithmus.
Achtung: Manchmal auch log(x) (z.B. GeoGebra, Maxima).

$ld(x) := \log_2(x)$ **l**ogarithums **d**ualis, Zweier-Logarithmus, manchmal auch $lb(x)$ (binär).

$lg(x) := \log_{10}(x)$ Zehner-Logarithmus, oder dekadischer Logarithmus.
Achtung: Oft auch $\log(x)$ z.B.: Taschenrechner!
⇒ Verwechslungsgefahr mit $\ln(x)$!
Tipp: bei unbekannten Taschenrechnern / Programmen:
einfach $\log(10)$ eingeben: Falls Ergebnis $=1$, dann ist es der 10-er Logarithmus.

2. Zusammenhang Exponentialfunktion ↔ Logarithmus

Funktion ↔ Umkehrfunktion:

Es gilt: $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, also $\exp_b\left(\log_b(x)\right) = b^{\log_b(x)} = x$

und $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$, also $\log_b\left(\exp_b(x)\right) = \log_b\left(b^x\right) = x$

Lösen von Gleichungen mit x im Exponenten:

$$y = b^{\boldsymbol{x}} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \log_b(y)$$

In Worten:

Der Logarithmus von y zur Basis b ist die Zahl mit der man b potenzieren muss um y zu erhalten.

Gleichungen mit Exponentialfunktion oder Logarithmus auflösen:

$f(x) = g(x) \overset{\Rightarrow \text{Delogarithmieren}}{\Leftrightarrow} b^{f(x)} = b^{g(x)}$

$f(x) = g(x) \overset{\Rightarrow \text{Logarithmieren}}{\Leftrightarrow} \log_b(f(x)) = \log_b(g(x))$ falls $f(x) > 0 \ \wedge \ g(x) > 0 \ \ \forall \ x \in D$

Beispiel:

$3 = 2^{x+2} \overset{\text{Logarithmieren}}{\Rightarrow} ld(3) = x + 2 \ \Rightarrow \ x = ld(3) - 2$

3. Rechenregeln

	Regel	Beweis
(1)	$\log_b(1) = 0$	$1 = b^0 = b^{\log_b(1)}$
(2)	$\log_b(b) = 1$	$b = b^1 = b^{\log_b(b)}$
(3)	$b^{\log_b(x)} = x$	nach Definition, oder $f(f^{-1}(x)) = x$
(4)	$\log_b(b^x) = x$	mit $y = b^x$ gilt: $x = \log_b(y) = \log_b(b^x)$, oder $f^{-1}(f(x)) = x$
(5)	$\log_b(a^x) = x \log_b(a)$	$\log_b(a^x) = \log_b\left(\left(b^{\log_b(a)}\right)^x\right) = \log_b\left(b^{x \log_b(a)}\right) = x \log_b(a)$
(6)	$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$	$\log_b(x \cdot y) = \log_b(b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(y)}) = \log_b(b^{\log_b(x) + \log_b(y)})$ $= \log_b(x) + \log_b(y)$
(7)	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x \cdot y^{-1}) = \log_b(x) + \log_b(y^{-1})$ $= \log_b(x) - \log_b(y)$
(8)	$a^x = b^{x \log_b(a)}$	$a^x = \left(b^{\log_b(a)}\right)^x = b^{x \log_b(a)}$
(9)	$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$	$\log_b(x) = \frac{\log_b(x) \cdot \log_a(b)}{\log_a(b)} = \frac{\log_a\left(b^{\log_b(x)}\right)}{\log_a(b)} = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
(10)	$\boxed{a^x = e^{x \cdot \ln(a)}}$	$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$

4. Anwendungen:

4.1 Ableitung von a^x

$$\boldsymbol{f'(x)} = \left(a^x\right)' = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^{x+h}-a^x}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^x\left(a^h-1\right)}{h}\right) = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right) = \underbrace{a^x}_{=f(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-a^0}{h}\right)}_{=f'(0)}$$

$$= \boldsymbol{f(x)\cdot f'(0)}$$

Wir suchen nun ein a so, dass $f'(0)=1$, denn dann hätten wir eine Funktion mit

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x)=f(x)}}$$

Wir betrachten im Folgenden nun den Term $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)$

Trick: setze $a^h-1 =: k \;\Rightarrow\; a^h = k+1 \;\Rightarrow\; h=\log_a(k+1)$

$$\Rightarrow\; \frac{a^h-1}{h} = \frac{k}{\log_a(k+1)}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{h\to 0}\left(\frac{a^h-1}{h}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{k}{\log_a(k+1)}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_a(k+1)}\right) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{\log_a\left((k+1)^{\frac{1}{k}}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{\log_a\left(\underbrace{\lim_{k\to 0}\left((k+1)^{\frac{1}{k}}\right)}_{=:\,\boldsymbol{e}}\right)} = \frac{1}{\log_a(e)} = \frac{1}{\frac{\ln(e)}{\ln(a)}} = \ln(a)$$

Also $\boxed{\boldsymbol{\left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln(a)}}$ insbesondere $\boxed{\boldsymbol{\left(e^x\right)' = e^x}}$,

$\boxed{\boldsymbol{\ln'(x) = \frac{1}{x}}}$ und $\boxed{\boldsymbol{\log_a{}'(x) = \frac{1}{x\cdot\ln(a)}}}$

denn $e^{\ln(x)} = x \;\Rightarrow\; \left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)' \;\Rightarrow\; \underbrace{e^{\ln(x)}}_{=x}\cdot\ln'(x) = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

und $\left(\log_a(x)\right)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)}\cdot\frac{1}{x} = \boldsymbol{\frac{1}{x\cdot\ln(a)}}$

4.2 Dezibel

Benannt nach dem Schotten Alexander Graham **Bell**, **1847 -1922 (Kanada) britischer*

Sprechtherapeut, Erfinder und Großunternehmer. „Er gilt als der erste Mensch, der aus der Erfindung des Telefons Kapital geschlagen hat, indem er Ideen seiner Vorgänger zur Marktreife weiterentwickelte." (Wikipedia)

Ist x ein Größe und x_0 eine Bezugsgröße gleicher Einheit, dann wird der Wert

$y = \log_{10}\left(\frac{x}{x_0}\right) B$ mit der Einheit Bel ($[Bel] = B$) bezeichnet.

Ein $Dezibel$ (dB) ist definiert als $1\,dB = \frac{1}{10}\,B$.

Immer Bezugsgröße benötigt:

Spannung: $0\,dB \triangleq\ 0{,}775\,V$

Schallpegel: $0\,dB \triangleq\ 2 \cdot 10^{-5}\,P$

Schallquelle/Ereignis	dB bezüglich Hörschwelle	Schalldruck in P
Hörschwelle bei 2 kHz	0	2·10-5
Blätterrauschen, ruhiges Atmen	10	6,3·10-5
Sehr ruhiges Zimmer	20–30	2·10-4–6,3·10-4
Normale Unterhaltung, 1 m entfernt	40–50	2·10-3–6,3·10-3
Fernseher in 1 m Zimmerlautstärke	ca. 60 dB	0,02
Pkw, 10 m entfernt	60–80	0,02–0,2
Hauptverkehrsstraße, 10 m entfernt	80–90	0,2–0,63
Gehörschäden bei langfristiger Einwirkung	ab 85	0,36
Presslufthammer, 1 m entfernt / Diskothek	~ 100	2
Düsenflugzeug 100 m entfernt	110–140	6,3–200
Gehörschäden bei kurzfristiger Einwirkung	ab 120	20
Schmerzschwelle	134	100

Aufgabe:

Ein Spannungspegel ist mit 10 dB angegeben, wie groß ist diese Spannung?

Aufgabe:

Ein Signal wird um 3 dB verstärkt / gedämpft. Um wie viel wurde das Signal angehoben / abgeschwächt?

$$y\,\underbrace{d}_{\frac{1}{10}}\,B = \log_{10}\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log_{10}(x) - \log_{10}(x_0) \;\Leftrightarrow\; \log_{10}(x) = y\,dB + \log_{10}(x_0)$$

$$\Leftrightarrow\; x = 10^{y\,dB + \log_{10}(x_0)} = 10^{y\,dB}\,10^{\log_{10}(x_0)} = 10^{y\,dB}\,x_0 = 10^{\frac{y}{10}}\,x_0$$

dB	-10 dB	-6 dB	-3 dB	0 dB	2 dB	3 dB	6 dB	10 dB
Faktor	0.1	0.251	0.501	1.0	1.585	1.995	3.981	10.0
	$\frac{1}{10}$	$\approx \frac{1}{4}$	$\approx \frac{1}{2}$	1	$\approx 1{,}6$	≈ 2	≈ 4	10

4.3 Richterskala

$\boldsymbol{M_L = \log_{10}\left(\frac{A_{max}}{A_0}\right)}$, Faktor für freigesetzte Energie pro Punkt auf Skala: ca 32.

A_{max} in μm :Ausschlag eines kurzperiodisches Standardseismometers in einer Entfernung von 100 km zum Epizentrum.

A_0 : Bezugsterm/Korrekturterm (z.B. für verschiedene Entfernungen)

Erdbeben Japan 2011:

Beim Hauptbeben wurde eine Energie von ca. $1{,}9 \cdot 10^{17}\,J$ freigesetzt.

Entspricht etwa Primärenergieverbrauch Deutschlands in einer Woche (im Jahr 2010) oder Energie der stärksten je gezündeten Wasserstoffbombe.

Aufgabe:

Am 13. Apr. 1992 gab es ein Erdbeben nahe Roermond (Niederlande) mit der Magnitude 5,9. Wie viel mehr Energie setzte das Erdbeben von Japan 2011 frei, dessen Magnitude mit 9,2 angegeben wird?

$32^{9{,}2-5{,}9} \approx 3{,}5 \cdot 10^{13} = 35\,Billionen$

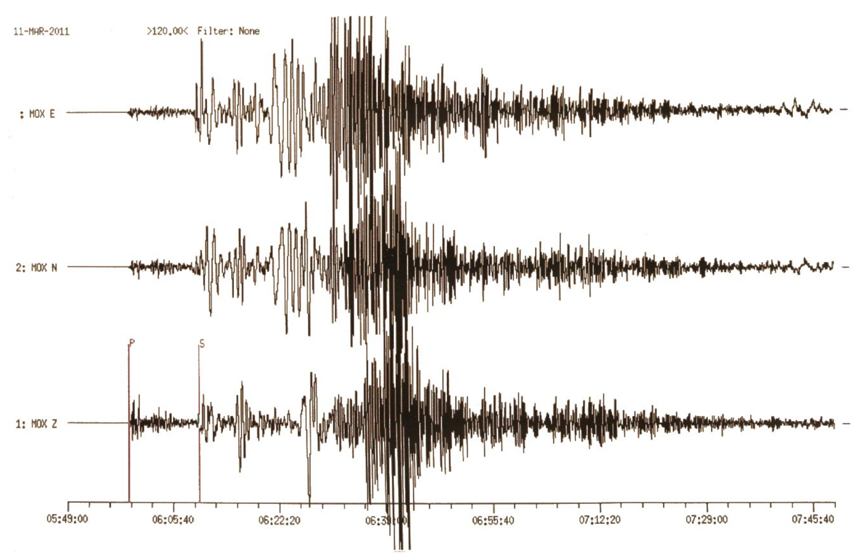

Abb. 1: Japan 2011

4.4 pH-Wert

Oxoniumion: H_3O^+

Hydroxidion: OH^-

Vereinfacht: $pH \approx -\log_{10}\left(\frac{\left[H_3O^+\right]}{\frac{mol}{l}}\right)$, $pOH \approx -\log_{10}\left(\frac{\left[OH^-\right]}{\frac{mol}{l}}\right)$ $pH + pOH = 14$

Durchschnittliche pH-Werte einiger gebräuchlicher Lösungen

Substanz	**pH-Wert**	**Art**
Salzsäure 35 %	**-1**	
Salzsäure 3,5 %	**0**	
Magensäure (nüchterner Magen)	**1,0–1,5**	
Zitronensaft	**2,4**	
Cola	**2,0–3,0**	
Essig 5% - 6%	**2,5**	
Fruchtsaft der Schattenmorelle	**2,7**	
Orangen- und Apfelsaft	**3,5**	
Wein	**4,0**	**sauer**
Saure Milch	**4,5**	
Bier	**4,5–5,0**	
Saurer Regen	**< 5,0**	
Kaffee	**5,0**	
Tee	**5,5**	
Regen (natürlicher Niederschlag)	**5,6**	
Mineralwasser	**6,0**	
Milch	**6,5**	
Wasser (je nach Härte)	**6,0–8,5**	
Reines Wasser	**7,0**	**sauer bis alkalisch**
Menschlicher Speichel	**6,5–7,4**	
Blut	**7,4**	
Meerwasser	**7,5–8,4**	
Pankreassaft (Darmsaft)	**8,3**	
Seife	**9,0–10,0**	
Haushalts-Ammoniak	**11,5**	**alkalisch**
Bleichmittel	**12,5**	
Beton	**12,6**	
Natronlauge 3%	**14**	
Natronlauge 30%	**15**	

Aufgabe:

Wie viele Oxoniumionen enthält damit ein 1 l Cola, wenn Cola einen pH Wert von ca 2,5 aufweist?

$$x\,pH = -\log_{10}\left(\frac{\left[H_3O^+\right]}{\frac{mol}{l}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[H_3O^+\right] = 10^{-x\,pH}\frac{mol}{l} = 10^{-x\,pH} \cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot \frac{Teilchen}{l}$$

$$\left[H_3O^+\right] = 10^{-2,5}\frac{mol}{l} = 10^{-2,5} \cdot 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot \frac{Teilchen}{l} \approx \frac{1.9\cdot 10^{21}\cdot H_3O^+}{l}$$

$1\,l = 3{,}35\,10^{25}$ Moleküle, also ca $18000\;H_2O\;pro\;Oxoniumionen$

---

5. Anhang:

Abschätzung $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

$\boldsymbol{e \geq 1}$:

$$\mathbf{1} = 1^n = \lim_{n\to\infty}\left(1^n\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \boldsymbol{e}$$

$\boldsymbol{e \leq 4}$:

$$\boldsymbol{e} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-i+1)}{1\cdot 2\cdots i}\cdot\frac{1}{n^i}$$

$$\leq 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\overbrace{n\cdot n\cdots n}^{i-mal}}{1\cdot 2\cdots i}\cdot\frac{1}{n^i} = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdots i} = 1+1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{1\cdot 2\cdots i} = 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2\cdot 3\cdots i} \leq 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{(i-1)-mal}}$$

$$= 2+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2^{i-1}} = 2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i} = 2+\left(\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2+\frac{2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1}{2^{n-1}}$$

$$= 2+\frac{\left(2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+1\right)(2-1)}{2^{n-1}} = 2+\frac{2^n-1}{2^{n-1}} \leq 2+\frac{2^n}{2^{n-1}} = 2+2 = \mathbf{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leq \lim_{n\to\infty}(4) = 4$$

Definition von e^x:

$e^x \coloneqq \exp(x) \coloneqq \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, mit $x \in \mathbb{C}$.

Quellen für Tabellen und Bilder: Wikipedia und Unbekannte, zum Teil verändert.