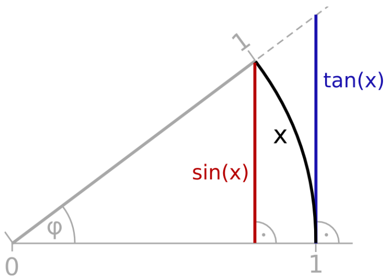
1. Ableitung des sin / cos / tan

Zuerst zeigen wir: Für $x \in \mathbb{R}^*$ gilt: $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1}$.

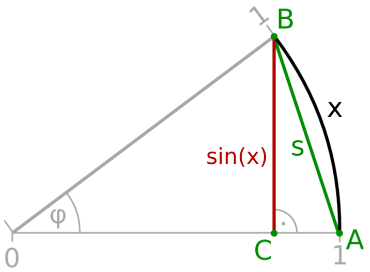
Beweis:



Am Einheitskreis gilt für $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:

$\sin(x) \le x \le \tan(x)$

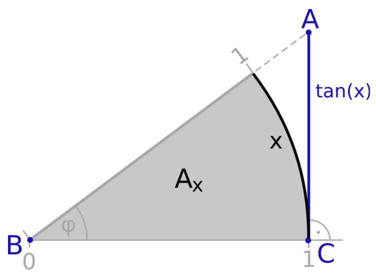
denn:



(1) $\sin(x) \le s$: Dreicksungleichung (oder Pythagoras im $\Delta\, ABC$)

(2) $s \le x$: s ist kürzeste Verbindung zwischen A und B

(1) und (2): $\sin(x) \le s \le x \;\Rightarrow\; \sin(x) \le x$



Fläche des Kreissegments A_x : $\dfrac{A_x}{1^2 \cdot \pi} = \dfrac{x}{2 \cdot 1 \cdot \pi} \;\Rightarrow\; A_x = \dfrac{1}{2}x$

Fläche des Dreicks $A_{\Delta\, ABC}$ $\quad A_{\Delta\, ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \tan(x)$

Mit $A_x \le A_{\Delta\, ABC}$ folgt: $\underbrace{\frac{1}{2}x}_{A_x} \le \underbrace{\frac{1}{2}\tan(x)}_{A_{\Delta\, ABC}} \;\Leftrightarrow\; x \le \tan(x)$

also:

$$\sin(x) \le x \le \tan(x) \quad \Big|\, \cdot \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\sin(x)} \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \le \frac{x}{\sin(x)} \le \frac{1}{\cos(x)}$$

Für $x \to 0$ ist dann $\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}(1)}_{=1} \le \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right) \le \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)}_{=1} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin(x)}\right) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\left.\frac{x}{\sin(x)}\right\}\to 1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \textit{Beh.}\ .$$

1.1 Ableitung des sin(x):

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{sin}'(\boldsymbol{x}) = \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{\sin(\tilde{x})-\sin(x)}{\tilde{x}-x}\right) = \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{2\cos\left(\frac{\tilde{x}+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\tilde{x}-x}{2}\right)}{\tilde{x}-x}\right)$$

$$= \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\tilde{x}+x}{2}\right)}_{\to\cos(x)}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\tilde{x}-x}{2}\right)}{\frac{\tilde{x}-x}{2}}}_{\to 1}\right) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{x}),\ \text{denn} \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{\tilde{x}-x}{2}\right)=0$$

also $\boxed{\mathbf{sin}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{cos}(\boldsymbol{x})}$.

1.2 Die Kettenregel (Nachdifferenzieren)

Es gilt die Kettenregel: $\boxed{\left(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)\right)' = \boldsymbol{f}'\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})}$

oder anders geschrieben: $(f\circ g)' = \frac{d(f\circ g)}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = \underbrace{f'\left(g(x)\right)}_{\text{äussere Ableitung}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\textbf{Nachdifferenzieren}\\ \text{innere Ableitung}}}$$

denn:

$$(f\circ g)'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{f\left(g(\tilde{x})\right)-f\left(g(x)\right)}{\tilde{x}-x}\right) = \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{f\left(g(\tilde{x})\right)-f\left(g(x)\right)}{g(\tilde{x})-g(x)}\cdot\frac{g(\tilde{x})-g(x)}{\tilde{x}-x}\right)$$

$$= \lim_{g(\tilde{x})\to g(x)}\left(\frac{f\left(g(\tilde{x})\right)-f\left(g(x)\right)}{g(\tilde{x})-g(x)}\right)\cdot\lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{g(\tilde{x})-g(x)}{\tilde{x}-x}\right)$$

$$= f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Beispiele:

1. $h(x) = \left(x^2+1\right)^3 \ \Rightarrow\ h'(x) = \underbrace{3\cdot\left(x^2+1\right)^2}_{f(g'(x))}\cdot\underbrace{2x}_{g'(x)}$ mit $f(x) := x^3$ und $g(x) := x^2+1$.
2. $f(x) = \sin\left(x^3-2x^2\right) \ \Rightarrow\ f'(x) = \cos\left(x^3-2x^2\right)\cdot\left(3x^2-4x\right)$
3. $f(x) = \cos\left(x^2-3x\right)^2 \ \Rightarrow\ f'(x) = \left[2\cdot\cos\left(x^2-3x\right)\right]\cdot\left[-\sin\left(x^2-3x\right)\right]\cdot(2x-3)$

1.3 Ableitung des cos(x)

Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\mathbf{cos}'(\boldsymbol{x}) = \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \underbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{=-\sin(x)} \cdot \underbrace{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'}_{=1} = -\sin(x)\cdot 1 = \boldsymbol{-\sin(x)}\ .$$

also $$\boxed{\mathbf{cos}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{-\sin(x)}}\ .$$

1.4 Produktregel

$$\boxed{\left(\boldsymbol{u(x)\cdot v(x)}\right)' = \boldsymbol{u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}}$$

oder kurz: $$\boxed{\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{u(x)\cdot v(x)}\right)' &= \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{u(\tilde{x})\cdot v(\tilde{x}) - u(x)\cdot v(x)}{\tilde{x}-x}\right)\\
&= \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{u(\tilde{x})\cdot v(\tilde{x}) \overbrace{- u(x)\cdot v(\tilde{x}) + u(x)\cdot v(\tilde{x})}^{=0} - u(x)\cdot v(x)}{\tilde{x}-x}\right)\\
&= \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\frac{u(\tilde{x})\cdot v(\tilde{x}) - u(x)\cdot v(\tilde{x})}{\tilde{x}-x} + \frac{u(x)\cdot v(\tilde{x}) - u(x)\cdot v(x)}{\tilde{x}-x}\right)\\
&= \lim_{\tilde{x}\to x}\left(\underbrace{\frac{\left(u(\tilde{x}) - u(x)\right)}{\tilde{x}-x}}_{\to u'(x)}\cdot \underbrace{v(\tilde{x})}_{\to v(x)} + \underbrace{u(x)}_{\to u(x)}\cdot \underbrace{\frac{\left(v(\tilde{x}) - v(x)\right)}{\tilde{x}-x}}_{\to v'(x)}\right)\\
&= \boldsymbol{u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v(x)} \;\Rightarrow\; f'(x) = \underbrace{2x}_{u'(x)}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v(x)} + \underbrace{x^2}_{u(x)}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{v'(x)}$

2. $\left(x\cdot\sqrt{x}\right)' = 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

alternativ: $\left(x\cdot\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

3. $f(x) = (x^2-1)\cdot(3x-5) \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x\cdot(3x-5) + (x^2-1)\cdot 3 = 9x^2 - 10x - 3$

alternativ: $f(x) = (x^2-1)\cdot(3x-5) = 3x^3 - 5x^2 - 3x + 5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 9x^2 - 10x - 3$

Aufgaben auf S.96

1.5 Quotientenregel

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

oder kurz:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\cdot u' - u\cdot v'}{(v)^2}$$

Merkregel: (Naz-zahn):

$$\frac{N\ aZ - Z\ aN}{N^2} = \frac{Nenner(abgeleitet\ Zähler) - Zähler(abgeleitet\ Nenner)}{Nenner^2}$$

Beweis:

Mit $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \left[(v(x))^{-1}\right]' \overset{\substack{\text{Ketten-}\\ \text{regel}}}{=} \underbrace{\left[(-1)\cdot(v(x))^{-2}\right]}_{(x^n)' = n x^{n-1}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\substack{\text{Nachdifferen-}\\ \text{zieren!}}} = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$ ergibt sich:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot(v(x))^{-1}\right)' \overset{\substack{\text{Produkt-}\\ \text{regel}}}{=} \left(u(x)\cdot v(x)^{-1}\right)'$$

$$= u'(x)\cdot v(x)^{-1} + u(x)\cdot\left(v(x)^{-1}\right)' = \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x)\cdot\left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = \frac{v(x)u'(x)}{v(x)^2} - \frac{u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$= \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

Beispiele:

1. $\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2+1)\cdot 2x - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

2. $f(x) = \frac{3x+2}{x-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-2)\cdot 3 - (3x+2)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-8}{(x-2)^2}\ ,\quad x \neq 2$

1.6 Ableitung des tan(x)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ ist

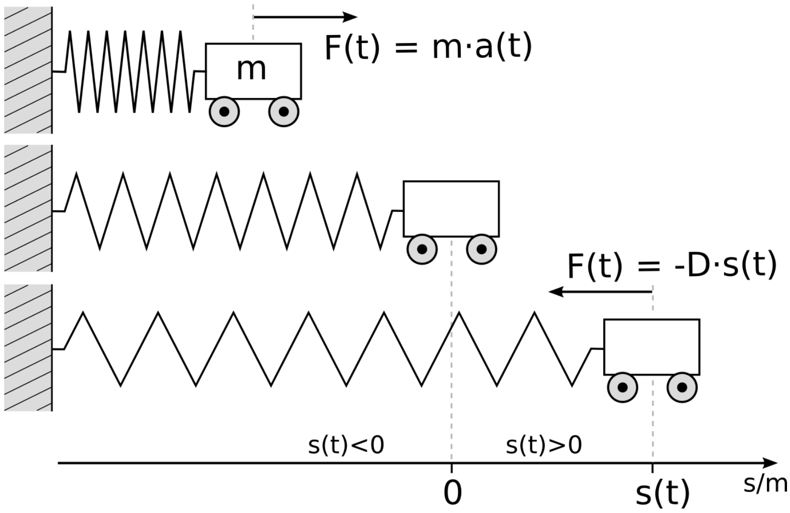
$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}\ .$$

also

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}\ .$$

Aufgaben auf S.96-97

1.7 Anwendung: Schwingungsgleichung



In obiger Skizze ist:

t: Zeit

$s(t)$ Auslenkung der Masse vom Gleichgewichtszustand (Feder entspannt) in Abhängigkeit von der Zeit t

$F(t)$ Rückstellende Federkraft in Abhängigkeit von $s(t)$ und somit von t.

Es gilt: $F(t) = -D \cdot s(t)$ (Hooksches Gesetz).

Nach Newton ist nun $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s}(t)$

Somit: $-D \cdot s(t) = F(t) = m \cdot \ddot{s}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{s(t) = -\frac{m}{D}\ddot{s}(t)}$

Wenn wir vorrübergehend $\frac{m}{D} = 1$ wählen und die Einheiten vernachlässigen, dann ergibt sich: $\boldsymbol{s(t) = -\ddot{s}(t)}$

Es wird also im wesentlichen eine Funktion gesucht, die 2-mal abgeleitet wieder die Funktion selbst ergibt, nur mit negativem Vorzeichen.

Eine solche Funktion ist z.B. $\sin(t)$, denn $\sin''(t) = -\sin(t)$.

Bemerkung: $a\sin(t-b)$ oder $\cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$ ginge auch.

Etwas Nachdenken und Probieren ergibt $\boldsymbol{s(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)}$ als eine mögliche Lösung, denn:

$$\ddot{s}(t) = \left[\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)\right]'' = \left[\cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}\right]' = -\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}} = -\frac{D}{m} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$$

$$= -\frac{D}{m} \cdot s(t)$$

Versuch: Schwingungsdauer (Periode) $p = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$.