Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen: Zählergrad > Nennergrad

1 Gegeben ist die Funktion $f_a: D \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{4a^2-7}{x-2} + a^2 x + 2a^2 - 4$, mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ und der maximalen Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie den Graphen von f_a auf Symmetrie.

Lösung:

Symmetrie:

Weder punktsymmetrisch bezüglich Ursprung, noch achsensymmetrisch bezüglich y-Achse, da die Definitionsmenge nicht symmetrisch zum Ursprung ist.

Es müsste $D = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ oder so was ähnliches sein.

Nullstellen:

Entweder auf einen Nenner bringen und Nullstellen des Zählers betrachten, oder gleich $f_a(x) = 0$ setzten: ergibt genau die gleiche Rechnung! (Nachprüfen!)

$$f_a(x) = \frac{4a^2-7}{x-2} + a^2x + 2a^2 - 4 = \frac{4a^2-7+(x-2)\left(a^2x+2a^2-4\right)}{x-2} = \frac{a^2x^2-4x+1}{x-2}$$

Aber voher noch den:

1. Fall: $\boldsymbol{a_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7}} \Rightarrow f_{a_{1/2}} = \frac{1}{4}(7x-2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$, *einfach (mVzw).*

Wie kommt es zu diesen beiden Fällen a_1 und a_2?

Wir berechnen a so, dass der (praktischerweise schon vorhandene) gebrochene Anteil (also der Bruch) verschwindet:

$f_a(x) = \underbrace{\frac{4a^2-7}{x-2}}_{=0} + a^2x + 2a^2 - 4$, *also :* $4a^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow a_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$.

Jetzt ganz normal das Schema runter rechen:

$a^2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4a^2}}{2a^2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-a^2}}{a^2} = \frac{2 \pm \sqrt{(2-a)(2+a)}}{a^2}$, falls möglich.

a darf nicht 0 sein, sonst funktioniert die Lösungsformel nicht, also betrachten wir vorher noch den Fall $a = 0$:

2. Fall: $\boldsymbol{a = 0} \Rightarrow f_0 = \frac{-4x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$, *einfach (mVzw).*

Mit der Diskriminante $D=4-a^2$ ergeben sich dann die Fälle:

3. Fall: $D<0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a\in\mathbb{R}\setminus[-2;2]}$ ⇒ *keine Nullstellen.*

4. Fall: $D=0 \;\Leftrightarrow\; a=-2 \;\vee\; a=2$

$\boldsymbol{a=-2} \;\Rightarrow\; x=\frac{2}{(-2)^2}=\frac{1}{2}$ *zweifache Nullstelle (oVzw)*

$\boldsymbol{a=2} \;\Rightarrow\; x=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$ *zweifache Nullstelle (oVzw)*

5. Fall: $D>0 \;\Leftrightarrow\; a\in\left]-2;2\right[$

⇒ für $\boldsymbol{a\in\left]-2;2\right[\setminus\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{7};0;\frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}}$ sind $x_{1/2}$ je einfache Nullstellen (mVzw).

Die Fälle $\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$ und 0 muss man noch rausnehmen, die wurden ja schon behandelt!

1.2 Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke in Abhängigkeit von a.

Lösung:

In diesem Fall ist das einfach: Wenn der Bruch $\frac{4a^2-7}{x-2}$ im Funktionsterm verschwindet, also 0 wird, ist die Definitionslücke ***behebbar****, ansonsten eine* ***Polstelle der Ordnung 1****:*

Nach **1.2** ist $f_a=\frac{1}{4}(7x-2)$ für $a\in\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{7};\frac{1}{2}\sqrt{7}\right\}$ $\Rightarrow x=2$ ist behebbare Definitionlücke, ansonsten Polstelle der Ordnung 1.

Setzen Sie für alle weiteren Teilaufgaben $a=\frac{4}{3}$.

Für die Funktion $f_{\frac{4}{3}}$ erhält man den Funktionsterm $f_{\frac{4}{3}}(x)=\frac{16x^2-36x+9}{9(x-2)}$.

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f_{\frac{4}{3}}$ an den Grenzen ihres Definitionsbereiches, geben Sie mit Begründung Art und Gleichungen der Asymptoten an sowie die Nullstellen:

Lösung:

Einsetzten in den Original-Term, (oder Polynomdivision) ergibt:

Schräge Asymptote:

$f_{\frac{4}{3}}(x)=\frac{16}{9}x-\frac{4}{9}+\frac{1}{9(x-2)} \;\Rightarrow\; A_s\!: y=\frac{16}{9}x-\frac{4}{9}$ ist schräge Asymptote für $x\to\pm\infty$,

somit $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f_{\frac{4}{3}}(x)\right)\to\pm\infty$.

Vertikale Aysmptoten:

Nach **1.2** hat $f_{\frac{4}{3}}$ an der Stelle $x=2$ genau eine Polstelle (1-ter Ordnung), also ist $A_v\!: x=2$ einzige vertikale Asymptote.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\underbrace{\frac{16}{9}x-\frac{4}{9}}_{\to\frac{28}{9}}+\underbrace{\frac{1}{9(x-2)}}_{\to+\infty}\right)\to+\infty \text{ und } \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\underbrace{\frac{16}{9}x-\frac{4}{9}}_{\to -4}+\underbrace{\frac{1}{9(x-2)}}_{\to-\infty}\right)\to-\infty$$

oder mit Vorzeichentabelle begründen, dann aber trotzdem nicht vergessen, den Limes anzugeben: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(f_{\frac{4}{3}}(x)\right)\to+\infty$ *und* $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(f_{\frac{4}{3}}(x)\right)\to-\infty$ *.*

Nullstellen:

$x_1=3\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{8}\approx 1{,}96,\quad x_2=3\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{8}\approx 0.29$

1.3.1 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extremalpunkte des Graphen von $f_{\frac{4}{3}}$, sowie die maximalen Monotonieintervalle:

$$\left[\mathit{Mögliches\ Teilergebnis}:\ f_{\frac{4}{3}}'(x)=\frac{16x^2-64x+63}{9(x-2)^2}\right]$$

Lösung:

$$f_{\frac{4}{3}}'(x)=\left(\frac{16x^2-36x+9}{9(x-2)}\right)'=\frac{(32x-36)(x-2)-(16x^2-36x+9)}{9(x-2)^2}$$

$$=\frac{32x^2-100x+72-16x^2+36x-9}{9(x-2)^2}=\frac{16x^2-64x+63}{9(x-2)^2}=\frac{16}{9}\cdot\frac{\left(x-\frac{9}{4}\right)\left(x-\frac{7}{4}\right)}{(x-2)^2}$$

(Letzter Term: 16 ausklammern und Lösungsformel)

Mögliche Extremstellen: $f_{\frac{4}{3}}'(x)=0 \iff x=\frac{9}{4}\ \vee\ x=\frac{7}{4}$ (jeweils mVzw).

Vorzeichentabelle:

Beachten Sie auch den Nenner für die maximalen Monotonieintervalle!

(Zweifache Nullstelle des Nenners oVzw an der Stelle $x=2$).

TW: $x=0:\ f_{\frac{4}{3}}'(0)=\frac{63}{9\cdot 4}>0$

		mVzW		*oVzW*		*mVzW*	
$\boldsymbol{x}$		$\frac{7}{4}$		2		$\frac{9}{4}$	
$\boldsymbol{f_{\frac{4}{3}}'(x)}$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$
	↗	—	↘		↘	—	↗

$\Rightarrow\quad x_H=\frac{7}{4}$ ist Maximum, $y_H=f_{\frac{4}{3}}\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{20}{9}=2{,}\overline{2}$, also $P_H\left(\frac{7}{4};\frac{20}{9}\right)$ ist HOP, und

$x_T = \frac{9}{4}$ ist Minimum, $y_T = f_{\frac{4}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) = 4$, also $P_H\left(\frac{9}{4}; 4\right)$ ist TIP,

sowie:

⇒ Maximale Monotonieintervalle:

streng monoton zunehmend in $x \in \left]-\infty; \frac{7}{4}\right]$ und $x \in \left]\frac{9}{4}; \infty\right]$

streng monoton abnehmend in $x \in \left[\frac{7}{4}; 2\right[$ und $x \in \left]2; \frac{9}{4}; 2\right]$

1.3.2 Bestimmen Sie die Wertemenge W

Lösung:

Wertemenge $W = \mathbb{R} \setminus \left]\frac{20}{9}; 4\right[$,

denn es gibt eine Lücke zwischen dem y-Wert Hochpunkts und dem y-Wert des Tiefpunkts (siehe **1.3.1**) und $f_{\frac{4}{3}}(x)$ → $\pm\infty$für $x \to \pm\infty$ (siehe **1.3**)

1.3.3 Bestimmen Sie ob $G_{f_{\frac{4}{3}}}$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie die maximalen Krümmungsintervalle von $G_{f_{\frac{4}{3}}}$.

Lösung:

$f_{\frac{4}{3}}''(x) = \frac{2}{9(x-2)^3} \neq 0$ für alle $x \in D_{f_{\frac{4}{3}}}$ ⇒ es existiert kein Wendepunkt.

Krümmungsverhalten:

Die Stelle $x = 2$ ist (dreifache) Nullstelle des Nenners von $f_{\frac{4}{3}}''(x)$ mit Vorzeichenwechsel (der Zähler hat keine Nullstellen).

Vorzeichentabelle:

TW: $x=3: f_{\frac{4}{3}}''(3) = \frac{2}{9} > 0$

$\boldsymbol{x}$		*mVzW* 2	
$\boldsymbol{f''_{4}(x)}$	$-$	n.d.	$+$

⇒ Maximale Krümmungsintervalle:

rechtsgekrümmt für $x \in]-\infty; 2[$,

linksgekrümmt für $x \in]2; +\infty[$

1.3.4 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Ergebnisse und geeigneter Funktions-Werte den Graph der Funktion $f_{\frac{4}{3}}$ zusammen mit seinen Asymptoten im Intervall $-1 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (Maßstab: $1\ \mathrm{LE} = 1 cm$)

Lösung: