Nullstellen, Monotonie und Extrempunkte: Lösungen

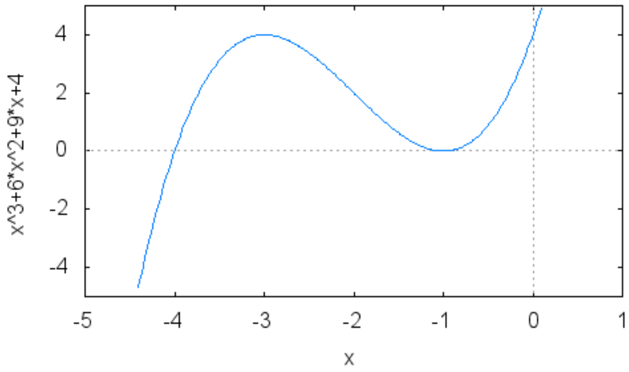
1.0 Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$.
Bestimmen Sie Lage und Art der Nullstellen von f,
Lage und Art der Extrempunkte von f, sowie die die maximalen Monotonieintervalle und skizzieren Sie den Graphen der Funktion.

1.1 $f(x) = x^3+6x^2+9x+4 = (x+1)^2(x+4)$

$f'(x) = 3x^2+12x+9 = 3(x+1)(x+3)$

Nullstellen:
$x_1=-1$ (2−fach, oVzw),
$x_2=-4$ (1−fach, mvzW)

Nullstellen der 1−ten Ableitung:
$x_3=-1$ (1−fach, mvzW)
$x_4=-3$ (1−fach, mvzW)



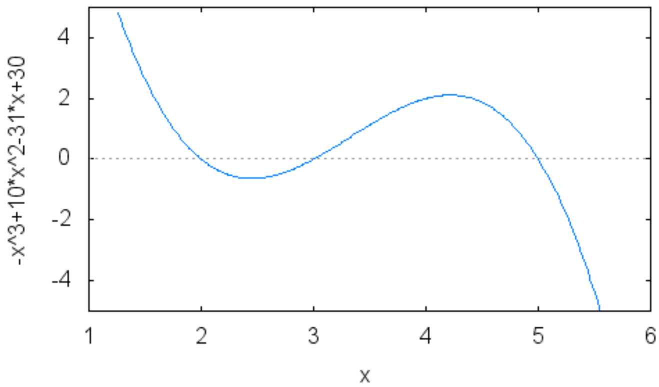
rel. HOP: $H(-3;\ 4)$
rel. TIP: $T(-1;\ 0)$
smz in $]-\infty;\ -3]$ und $[-1;\ \infty[$
sma in $[-3;\ 1]$

1.2 $f(x) = -x^3+10x^2-31x+30 = (5-x)(x-3)(x-2)$

$f'(x) = -3x^2+20x-31 = -3\left(x-\frac{10-\sqrt{7}}{3}\right)\left(x-\frac{10+\sqrt{7}}{3}\right)$

Nullstellen:
$x_1=5$, $x_2=3$ und $x_3=2$
(je 1−fach, mvzW)

Nullstellen der 1−ten Ableitung:
$x_{4/5}=\frac{10\pm\sqrt{7}}{3}$ (je 1−fach, mvzW)



rel. HOP: $H\left(\frac{10+\sqrt{7}}{3};\ \frac{2\left(10+\sqrt{7}^3\right)}{27}\right)$

rel. TIP: $T\left(\frac{10-\sqrt{7}}{3};\ \frac{2\left(10-\sqrt{7}^3\right)}{27}\right)$

sma in $\left]-\infty;\ \frac{10-\sqrt{7}}{3}\right]$ und $\left[\frac{10+\sqrt{7}}{3};\ \infty\right[$, sowie smz in $\left[\frac{10-\sqrt{7}}{3};\ \frac{10+\sqrt{7}}{3}\right]$

1.3 $f(x) = x^3+\frac{13}{4}x^2-\frac{23}{8}x+\frac{1}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+4)$

$f'(x) = 3x^2+\frac{13}{2}x-\frac{23}{8} = 3\left(x+\frac{13-\sqrt{307}}{12}\right)\left(x+\frac{13+\sqrt{307}}{12}\right)$

Nullstellen:

$x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{4}$ und $x_3=-4$ (je 1−fach, mvzW)

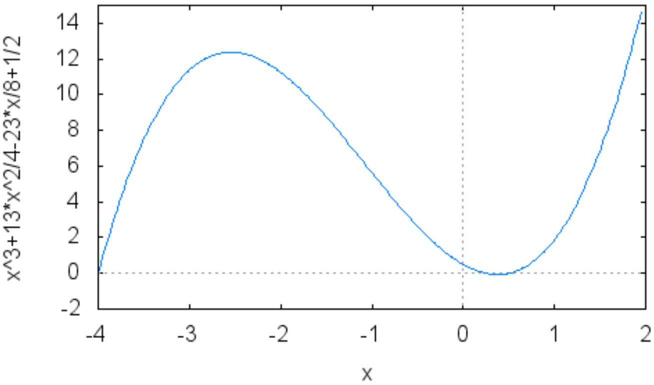
Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_{4/5}=-\frac{13\pm\sqrt{307}}{12}$ (je 1−fach, mvzW)

rel. HOP:

$H\left(-\frac{13+\sqrt{307}}{12};\frac{5320+\sqrt{307^3}}{864}\right)$

rel. TIP: $T\left(-\frac{13-\sqrt{307}}{12};\frac{5320-\sqrt{307^3}}{864}\right)$



smz in $\left]-\infty;-\frac{13+\sqrt{307}}{12}\right]$ und $\left[-\frac{13-\sqrt{307}}{12};\infty\right[$, sowie sma in $\left[-\frac{13+\sqrt{307}}{12};-\frac{13-\sqrt{307}}{12}\right]$

1.4

$$f(x) := x^3-\frac{28}{3}x^2+21x-6=(x-6)(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)$$

$$f'(x)=3x^2-\frac{56}{3}x+21=3\left(x-\frac{28-\sqrt{217}}{9}\right)\left(x-\frac{28+\sqrt{217}}{9}\right)$$

Nullstellen:

$x_1=6$ (1−fach, mvzW)

$x_2=3$ (1−fach, mvzW)

$x_3=\frac{1}{3}$ (1−fach, mvzW)

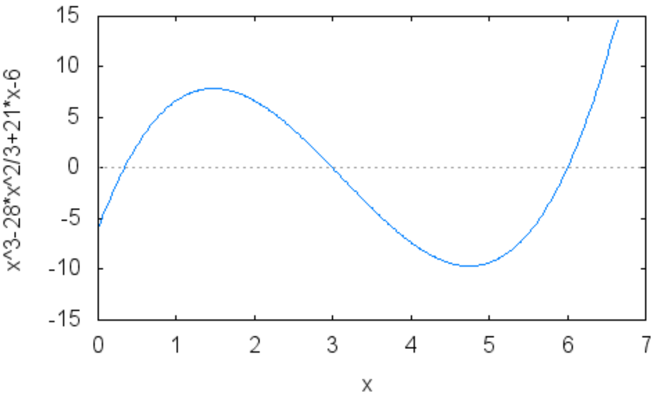
Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_{4/5}=\frac{28\pm\sqrt{217}}{9}$ (je 1−fach, mvzW)

rel. HOP:

$H\left(-\frac{13+\sqrt{307}}{12};\frac{5320+\sqrt{307^3}}{864}\right)$

rel. TIP: $T\left(\frac{28+\sqrt{217}}{9};-\frac{2\left(325+\sqrt{217^3}\right)}{729}\right)$



sma in $\left[\frac{28-\sqrt{217}}{9};-\frac{13-\sqrt{307}}{12}\right]$, sowie smz in $\left]-\infty;\frac{28-\sqrt{217}}{9}\right]$ und $\left[\frac{28+\sqrt{217}}{9};\infty\right[$

1.5

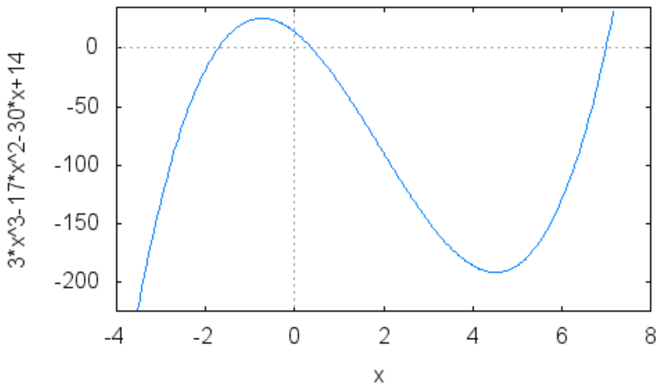
$$f(x)=3x^3-17x^2-30x+14=3(x-7)\left(x-\frac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$f'(x)=9x^2-34x-30=9\left(x-\frac{17+\sqrt{559}}{9}\right)\left(x-\frac{17-\sqrt{559}}{9}\right)$$

Nullstellen:

$x_1=7$ (1−fach, mvzW)

$x_{2/3}=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$ (je 1−fach, mvzW)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_{4/5}=\frac{17\pm\sqrt{559}}{9}$ (je 1−fach, mvzW)

rel. HOP:

$H\left(\frac{17-\sqrt{559}}{9};-\frac{2\left(10097-\sqrt{559^3}\right)}{243}\right)$

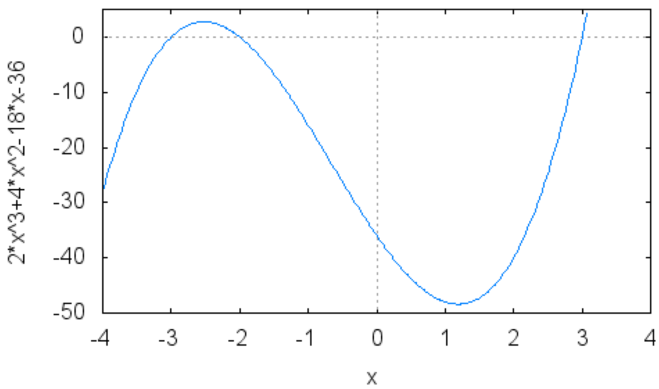
rel. TIP: $T\left(\frac{17+\sqrt{559}}{9};-\frac{2\left(10097+\sqrt{559^3}\right)}{243}\right)$

sma in $\left[\frac{17-\sqrt{559}}{9};\frac{17+\sqrt{559}}{9}\right]$, sowie smz in $\left]-\infty;\frac{17-\sqrt{559}}{9}\right]$ und $\left[\frac{17+\sqrt{559}}{9};\infty\right[$

1.6 $f(x)=2x^3+4x^2-18x-36=2(x-3)(x+2)(x+3)$

$f'(x)=6\left(x+\frac{2+\sqrt{31}}{3}\right)\left(x+\frac{2-\sqrt{31}}{3}\right)$

$f(x):=2x^3+4x^2-18x-36$



Nullstellen:

$x_{1/2}=\pm 3$ (1−fach, mvzW)

$x_3=-2$ (1−fach, mvzW)

Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_{4/5}=-\frac{2\pm\sqrt{31}}{3}$ (je 1−fach, mvzW)

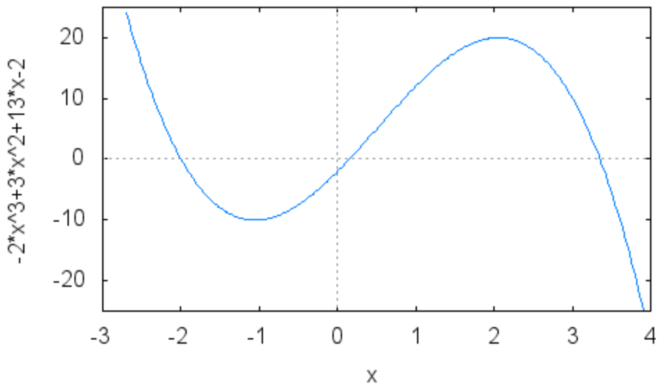
rel. HOP: $H\left(-\frac{2-\sqrt{31}}{3};\frac{4\left(-154+\sqrt{31^3}\right)}{27}\right)$ und rel. TIP: $T\left(-\frac{2-\sqrt{31}}{3};\frac{4\left(-154-\sqrt{31}\right)}{27}\right)$

sma in $\left[-\frac{2+\sqrt{31}}{3};-\frac{2-\sqrt{31}}{3}\right]$, sowie smz in $\left]-\infty;-\frac{2+\sqrt{31}}{3}\right]$ und $\left[-\frac{2-\sqrt{31}}{3};\infty\right[$

1.7 $f(x)=-2x^3+3x^2+13x-2=-2(x+2)\left(x-\frac{7-\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{7+\sqrt{41}}{4}\right)$

$f'(x)=-6x^2+6x+13=-6\left(x-\frac{3+\sqrt{87}}{6}\right)\left(\frac{3-\sqrt{87}}{6}\right)$

Nullstellen:
$x_1 = -2$
$x_{2/3} = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{4}$ (je 1−fach, mvzW)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:
$x_3 = \frac{3 \pm \sqrt{87}}{6}$ (je 1−fach, mvzW)

rel. HOP: $H\left(\frac{3+\sqrt{87}}{6}; \frac{4\left(-154+\sqrt{31^3}\right)}{27}\right)$

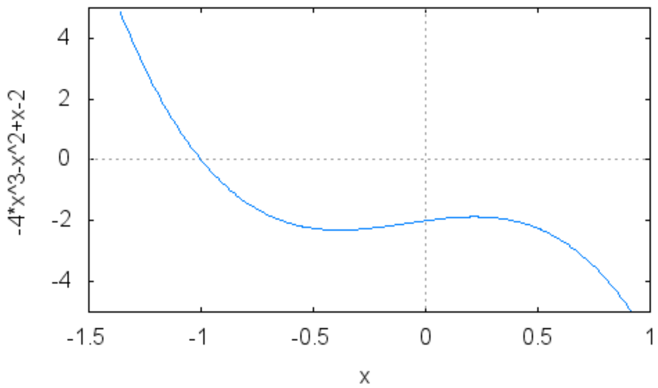
rel. TIP: $T\left(\frac{3-\sqrt{87}}{6}; \frac{29\left(90-\sqrt{87}\right)}{18}\right)$

smz in $\left[-\frac{2+\sqrt{31}}{3}; -\frac{2-\sqrt{31}}{3}\right]$, soiwe sma in $\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{87}}{6}\right]$ und $\left[\frac{3+\sqrt{87}}{6}; \infty\right[$

1.8 $f(x) = -4x^3 - x^2 + x - 2 = -(x+1)(4x^2 - 3x + 2)$

$f'(x) = -12x^2 - 2x + 1 = -12\left(x - \frac{\sqrt{13}-1}{12}\right)\left(x + \frac{\sqrt{13}+1}{12}\right)$

Nullstellen:
$x_1 = -1$ (1−fach, mvzW)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:
Nullstellen:
$x_{2/3} = -\frac{1 \pm \sqrt{13}}{12}$ (je 1−fach, mvzW)

rel. HOP: $H\left(-\frac{1-\sqrt{13}}{12}; -\frac{451-\sqrt{13^3}}{216}\right)$

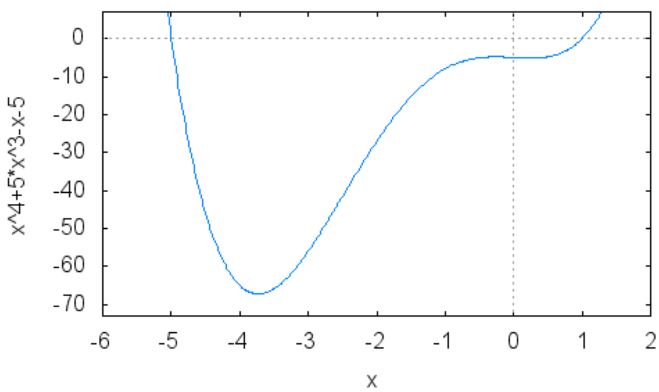
rel. TIP: $H\left(-\frac{1+\sqrt{13}}{12}; -\frac{451+\sqrt{13^3}}{216}\right)$

smz in $\left[-\frac{1+\sqrt{13}}{12}; -\frac{1-\sqrt{13}}{12}\right]$, sowie sma in $\left]-\infty; \frac{3-\sqrt{87}}{6}\right]$ und $\left[-\frac{1-\sqrt{13}}{12}; \infty\right[$

1.9 $f(x) = x^4 + 5x^3 - x - 5 = (x-1)(x+5)(x^2+x+1)$

$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 - 1 = 4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \sqrt{3} + 2\right)\left(x + \sqrt{3} + 2\right)$

Nullstellen:
$x_1 = 1$ (1−fach, mvzW)
$x_2 = -5$ (1−fach, mvzW)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:
$x_3 = \frac{1}{4}$ (1−fach, mvzW)
$x_{4/5} = -\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$ (je 1−fach, mvzW)
rel. HOP: $H\left(-\left(2-\sqrt{3}\right); -18\left(2-\sqrt{3}\right)\right)$

rel. TIP: $T_1\left(\frac{1}{4};-\frac{1323}{256}\right)$ und $T_2\left(-(2+\sqrt{3});-18(2+\sqrt{3})\right)$

smz in $\left[-(2+\sqrt{3});-(2-\sqrt{3})\right]$ und $\left[\frac{1}{4};-(2+\sqrt{3})\right]$, sowie

sma in $\left]-\infty;-(2+\sqrt{3})\right]$ und $\left[-(2+\sqrt{3});-(2-\sqrt{3})\right[$

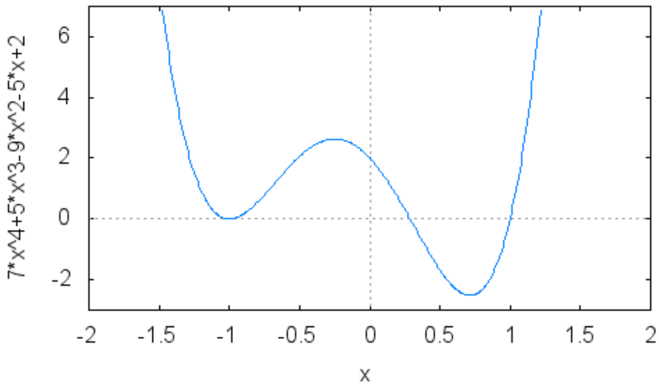
1.10 $f(x)=7x^4+5x^3-9x^2-5x+2=7(x-1)\left(x-\frac{2}{7}\right)(x+1)^2$

$f'(x)=28x^3+15x^2-18x-5=28\left(x-\frac{5}{7}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)(x+1)$

Nullstellen:

$x_1=1$ und $x_2=\frac{2}{7}$ (je 1−fach, mvzW)

$x_3=-1$ (2−fach, oVzw)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_4=\frac{5}{7}$ (1−fach, mvzW)

$x_5=-\frac{1}{4}$ (1−fach, mvzW)

$x_6=-1$ (1−fach, mvzW)

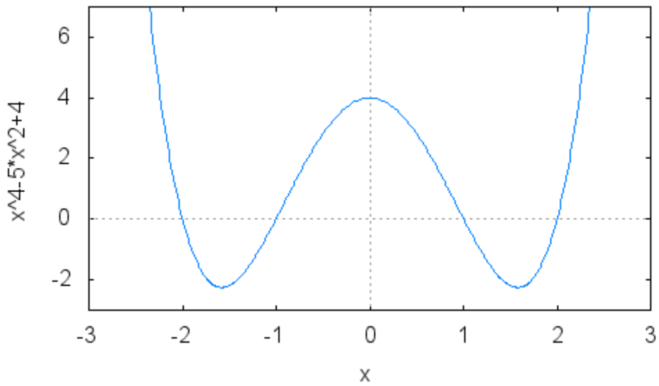
rel. HOP: $H\left(-(2-\sqrt{3});-18(2-\sqrt{3})\right)$, rel. TIP: $T_1\left(\frac{1}{4};-\frac{1323}{256}\right)$ und $T_2\left(\frac{5}{7};-\frac{864}{343}\right)$

sma in $\left]-\infty;-1\right]$ und $\left[-\frac{1}{4};\frac{5}{7}\right]$, sowie smz in $\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ und $\left[\frac{7}{8};\infty\right[$

1.11 $f(x)=x^4-5x^2+4=(x-2)(x+1)(x+2)$

$f'(x)=4x^3-10x=4x\left(x-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Nullstellen:
$x_{1/2}=\pm 2$ und $x_3=-1$
(je 1−fach, mvzW)



Nullstellen der 1−ten Ableitung:

$x_{4/5}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ (je 1−fach, mvzW) und $x_6=0$ (1−fach, mvzW)

rel. HOP: $H(0;4)$ und rel. TIP: $T_{1/2}\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}};\mp\frac{9}{4}\right)$

sma in $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$ und $\left[0;\sqrt{\frac{5}{2}}\right]$, sowie smz in $\left[-\sqrt{\frac{5}{2}};0\right]$ und $\left[\sqrt{\frac{5}{2}};\infty\right[$

1.12 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 = x^2(3x^2 - 8x + 6)$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x-1)^2$

Nullstellen:

$x_1 = 0$ (2−fach, ovzW)

Nullstellen der 1−ten Ableitung:

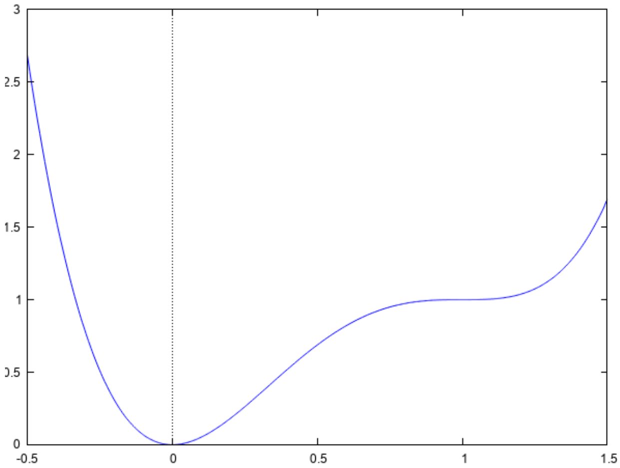
$x_2 = 0$ (1−fach, mvzW)

$x_3 = 1$ (2−fach, ovzW)

rel. TIP: $T(0;0)$

Terrassenpunkt TEP: $P_T(1;1)$

sma in $]-\infty;0]$, sowie smz in $[0;\infty[$



Hornerschema:

Beispiel: $f(x) = 3x^3 - 17x^2 - 30x + 14$.

Mit Taschenrechner: $f(7) = 3 \cdot 7^3 - 17 \cdot 7^2 - 30 \cdot 7 + 14 = 0 \;\Rightarrow\; x_0 := 7$ ist Nullstelle von f.

	x^3	x^2	x^1	x^0	Rest
	$\mathbf{3}$	-17	-30	14	
$x_0 = 7$		$\mathbf{3}$	4	-2	0
Erläuterung:		Übertrag von x^3	$7 \cdot 3 - 17$	$7 \cdot 4 - 30$	$7 \cdot (-2) + 14$

$\Rightarrow\; f(x) = (x-7)(3x^2 + 4x - 2)$