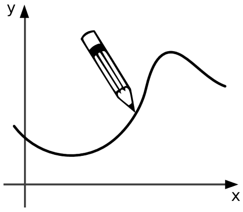
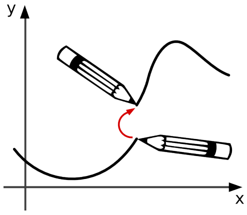
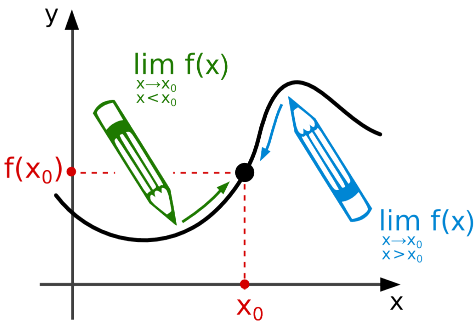
Stetigkeit

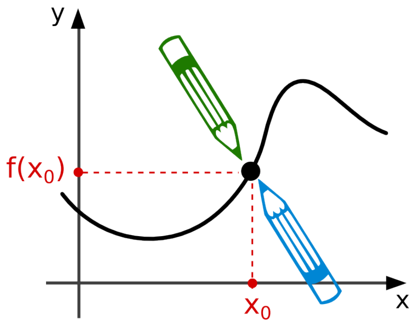
Merkregel:

Stetig		„Funktion kann ohne Absetzen des Stiftes gezeichnet werden“
Unstetig		„Stift muss beim Zeichnen der Funktion angehoben werden“

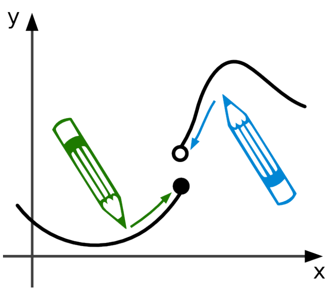
Beispiele:

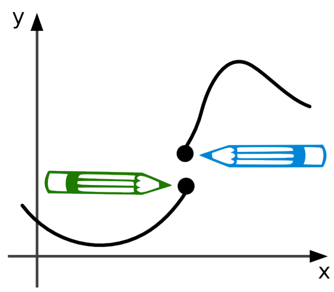
Stetig:

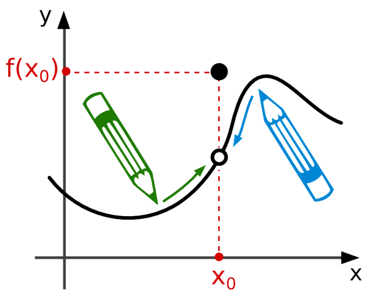


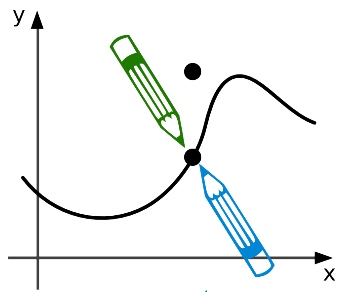


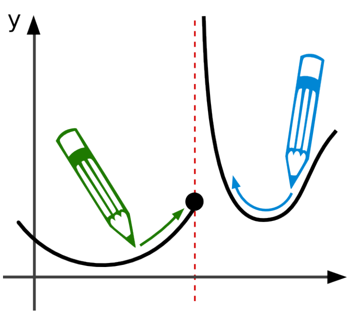
Unstetig:

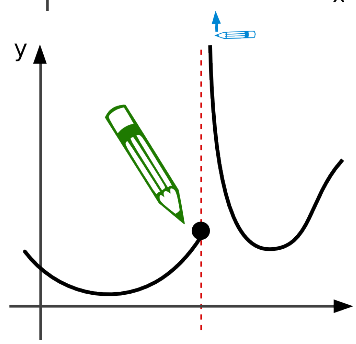








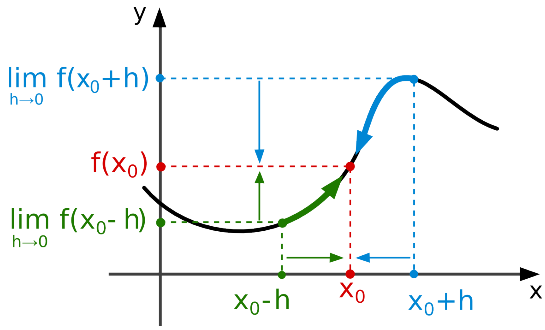




Definition:

Sie $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, heißt **lokal stetig** an der Stelle $x_0 \in D$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt, andernfalls **unstetig**.

Äquivalent: $\lim_{h \rightarrow 0} f(x-h) = f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$.



Definition:

$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $a \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$; f **rechtsseitig** stetig.

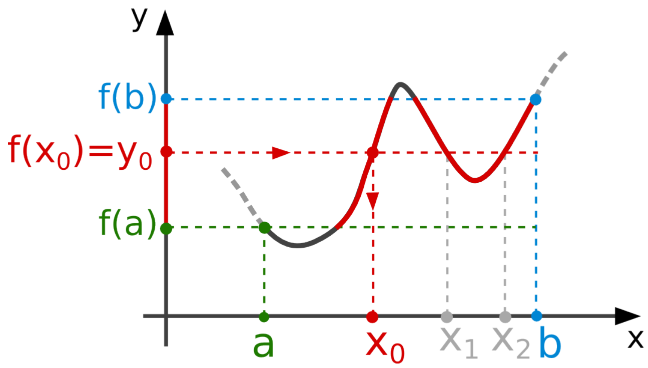
$f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $b \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = f(b)$; f **linksseitig** stetig.

Definition:

Sie $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, ist in einem **offenen** oder **abgeschlossenen** Intervall $I \subseteq D$ **stetig**, wenn sie an **jeder Stelle** x_0 dieses Intervalls **stetig** ist.

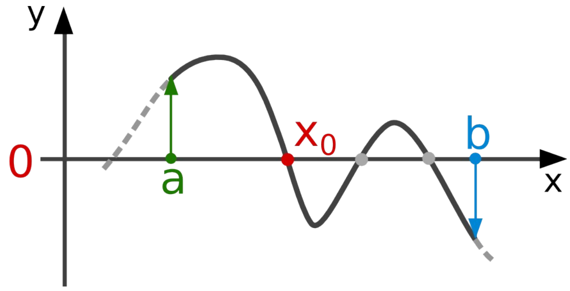
Zwischenwertsatz

Ein im **abgeschlossenen** Intervall $[a; b]$ definierte **stetige** Funktion nimmt jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Wert y_0 mindestens einmal an d.h., es gibt ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = y_0$.
Beachte: kann auch mehrere geben.



***Folgerung:* Nullstellensatz**

Hat eine auf einem **abgeschlossenen** Intervall $[a; b]$ definierte **stetige** Funktion an den Rändern des Intervalls einen positiven und einen negativen Funktionswert, so besitzt sie im Intervall mindestens eine Nullstelle x_0, d.h. es gibt ein $x_0 \in [a; b]$ mit $f(x_0) = 0$.
Beachte: kann auch mehrere geben.



Anwendung (Nullstellensatz):

Wenn wir nun mit Hilfe des Nullstellensatzes wissen, dass eine stetige Funktion f im Intervall $[a;b]$ eine Nullstelle hat, wie kann diese näherungsweise ermittelt werden?

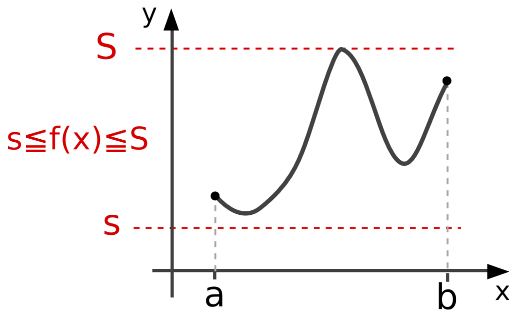
Ein Verfahren kennen wird schon, das **Bisektionsverfahren**.

Ein anders Verfahren ist das **Newtonverfahren**.

Beschränktheit

Ist eine Funktion f in einem **abgeschlossenen** Intervall $[a;b]$ **stetig**, so ist sie dort auch **beschränkt**.

Beschränkt bedeutet, dass zwei Zahlen S und s existieren so, dass $s \leq f(x) \leq S$ für alle $x \in [a;b]$. S heißt *obere*, s heißt *untere Schranke*



Extremwertsatz

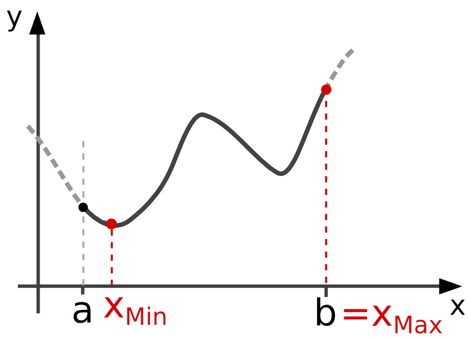
(Weierstraß 1815-1897, Berlin)

Eine im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definierte stetige Funktion hat dort ein Maximum und ein Minimum, d.h., es gibt $x_1, x_2 \in [a;b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a,b]$.

Bsp.: $f:[-2;1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2-1$. Es gilt: $f(0) \leq f(x) \leq f(-2)$.

Gegenbeispiel: $f:]0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1}{x}$

Gegenbeispiel: $f:[0;3[\to \mathbb{R}$ mit $f(x)=x$, denn $x_0 < \frac{x_0+3}{2}$ .für alle $x_0 \in [0;3[$



Stetige Fortsetzung:

Sie $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $x_0 \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x)$ eine Funktion. Existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, so lässt sich die Definitionslücke stetig abschließen. Die dabei erhaltene Funktion $f^*: x \mapsto \begin{cases} f(x) & , x \in I \wedge x \neq x_0 \\ a & , x = x_0 \end{cases}$ heißt stetige Fortsetzung oder stetige Ergänzung von f, x_0 heißt hebbare / behebbare Definitionslücke. (Singularität)